LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

SUR UN ANALYSEUR DE MOBILITÉ POUR LES IONS GAZEUX
III. APPLICATION DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES TRAITÉS A L'ÉTUDE DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE ENTRE UNE GRILLE ET DES PLATEAUX

Par P. LANGEVIN.

Sommaire. — Dans ce Mémoire, suite de ceux parus dans les deux numéros précédents (1), P. Langevin calcule le champ électrique produit par une grille conductrice placée entre deux plans conducteurs parallèles. Après avoir étudié divers cas particulier il donne la solution pour une grille épaisse placée entre deux plans conducteurs situés à des distances différentes.

Les solutions que nous venons d'obtenir permettent de résoudre les problèmes électrostatiques qui concernent le système constitué par une grille et les deux plateaux symétriquement placés par rapport à celle-ci. Pour distinguer les uns des autres ces trois conducteurs, nous ferons correspondre l'indice o au plateau CD, l'indice 1 à la grille et l'indice 2 au plateau AB. Nous prendrons pour origine des potentiels celui de CD, le potentiel de la grille étant U_1 et celui de AB étant U_2.

Le problème que nous avons résolu à propos du mouvement du gaz correspond au cas où U_2 est nul et où v_0 est remplacé par U_1. Le second problème, celui de la distribution du champ électrique correspondait à U_2 égal à $2\,U_1$.

En superposant les solutions correspondant à ces deux problèmes dans une proportion convenable, on aura la solution du problème général pour notre système lorsque les potentiels U_1 et U_2 sont quelconques. Si en effet U' représente la solution du premier problème et U'' celle du deuxième, on aura évidemment

$$U = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right) U' + \frac{U_2}{2U_1} U''. \qquad (83)$$

En effet, sur la grille, on a

$$U' = U'' = U_1,$$

d'où U égal à U_1, et sur le plateau AB on a

$$U' = 0, \qquad U'' = 2\,U_1,$$

d'où U égal à U_2.

Les quantités les plus intéressantes à calculer parmi celles qui caractérisent électrostatiquement notre système sont d'une part la capacité C_1 de la grille par unité de sa surface et le coefficient d'influence C_{02} ou C_{20} des plateaux AB et CD l'un sur l'autre à travers la grille. Les coefficients d'influence C_{12} et C_{10} de la grille sur les plateaux sont tous deux égaux à $-\frac{C_1}{2}$ par raison de symétrie.

Grille mince. — Prenons d'abord le cas de la grille infiniment mince et de la distance d suffisamment grande par rapport à la période $a + b$, cas auquel s'applique notre première solution du premier problème. La formule (30) donne

$$U' = U_1\left(1 - \frac{Y}{\delta - \mathrm{L}\gamma}\right) \quad (2).$$

D'autre part, nous avons déjà remarqué que pour $U_2 = 2\,U_1$, la présence des fentes dans la grille infiniment mince ne modifie pas la répartition des potentiels, le plan de la grille prenant spontanément le potentiel moitié de celui du plateau CD. On a

(1) *Journal de Physique et le Radium*, 1949, **10**, 177 et 225.

(2) L, logarithme népérien.

donc, en conservant l'origine des coordonnées η ou Y sur la grille comme dans la figure 5 [1].

$$U'' = U_1\left(1 - \frac{\eta}{\delta}\right).$$

D'où, en portant dans (83)

$$U = U_1 - \left(U_1 - \frac{U_2}{2}\right)\frac{Y}{\delta - L\gamma} - \frac{U_2}{2}\frac{\eta}{\delta}. \qquad (84)$$

Pour calculer les capacités ou coefficients d'influence, il faut se reporter à la distribution des charges qui est déterminée par la fonction de flux φ conjuguée de U. La fonction conjuguée de Y étant X, donnée par (24), et celle de η étant ξ, la fonction φ, supposée s'annuler sur la ligne de force qui passe par l'origine, milieu d'un barreau, devient d'après (84)

$$\varphi = \left(U_1 - \frac{U_2}{2}\right)\frac{X}{\delta - L\gamma} + \frac{U_2}{2}\frac{\xi}{\delta}. \qquad (85)$$

Pour trouver les charges présentes sur le plateau CD par période $a + b$ de la grille, nous devons donner à η la valeur δ et à ξ la valeur π, on a, dans ces conditions

$$X = \xi = \pi,$$

δ étant supposé assez grand pour que Coth δ puisse être considérée comme égale à l'unité. L'expression (85) devient

$$\varphi = \left(U_1 - \frac{U_2}{2}\right)\frac{\pi}{\delta - L\gamma} + \frac{U_2}{2}\frac{\pi}{\delta}.$$

D'après le théorème de Gauss, la charge Q correspondant au flux φ est égale à $\frac{\varphi}{4\pi}$; donc la charge portée par le plateau CD par période $a + b$ et par unité de longueur des barreaux est

$$Q = \frac{2U_1 - U_2}{8(\delta - L\gamma)} + \frac{U_2}{8\delta}.$$

Par unité de surface de la grille, on aura la charge

$$Q_1 = \frac{Q}{a+b} = \frac{2U_1 - U_2}{8[\pi d - (a+b)L\gamma]} + \frac{U_2}{8\pi d}. \qquad (86)$$

Si l'on veut avoir la capacité de la grille, il faut supposer U_2 égal à zéro et doubler la charge Q_1 pour tenir compte de celle que porte en même temps le plateau AB. En divisant par le potentiel U_1 pour avoir la capacité, on obtient

$$C_1 = \frac{1}{2[\pi d - (a+b)L\gamma]} \qquad (87)$$

ou, pour une surface S de la grille, et en remplaçant γ par sa définition (22)

$$C = \frac{S}{2\left[\pi d - (a+b)\,L\sin\frac{\pi b}{2(a+b)}\right]}.$$

Quand a est nul, c'est-à-dire que la grille est remplacée par un plan conducteur plein, le logarithme est nul et l'on retrouve bien la capacité $\frac{S}{2\pi d}$ d'un plateau isolé entre deux plateaux symétriquement placés par rapport à lui à distance d.

Lorsque, au contraire, b s'annule le logarithme devient infini négatif et la capacité s'annule comme elle doit le faire puisqu'il n'existe plus rien entre les deux plateaux.

Pour trouver le coefficient d'influence du plateau AB sur le plateau CD, par unité de surface de la grille, nous devons supposer nul le potentiel de celle-ci et (86) devient

$$Q_1 = \frac{U_2}{8}\left[\frac{1}{\pi d} - \frac{1}{\pi d - (a+b)L\gamma}\right],$$

d'où

$$C_{02} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{\pi d - (a+b)L\gamma} - \frac{1}{\pi d}\right]. \qquad (88)$$

Ce coefficient s'annule bien quand la grille est pleine ($a = 0$) puisqu'elle fait écran à l'influence mutuelle des plateaux, et devient bien, quand la grille disparaît ($b = 0$) égale à

$$C_{02} = -\frac{1}{8\pi d},$$

représentant l'influence, par unité de surface, d'un plateau sur un plateau parallèle situé à distance $2d$.

Grille épaisse. — Voyons maintenant ce que donne notre seconde solution, qui est plus générale puisqu'elle correspond à une distance d quelconque et à une épaisseur quelconque des barreaux.

Il résulte de (40)

$$U' = A_0\frac{\eta}{\delta} + \sum A_n \frac{\operatorname{sh} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta}\cos 2n\xi,$$

la fonction conjuguée

$$\varphi' = A_0\frac{\xi}{\delta} + \sum A_n \frac{\operatorname{ch} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta}\sin 2n\xi,$$

et de (67)

$$U'' = B_0\frac{\eta}{\delta} + \sum B_n \frac{\operatorname{sh} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta}\cos 2n\xi,$$

la fonction conjuguée

$$\varphi'' = B_0\frac{\xi}{\delta} + \sum B_n \frac{\operatorname{ch} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta}\sin 2n\xi.$$

La charge du plateau CD par période $a + b$ et par unité de longueur des barreaux s'obtient en faisant dans les φ, ξ égal à π, d'où, par application de la formule déduite de (83)

$$\varphi = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right)\varphi' + \frac{U_2}{2U_1}\varphi'',$$

la charge

$$Q = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right)\frac{A_0}{4\delta} + \frac{U_2}{2U_1}\frac{B_0}{4\delta}$$

[1] Voir *Journal de Physique Radium*, 1949, 10, 186.

et, par unité de surface de la grille

$$Q_1 = \frac{Q}{a+b} = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right)\frac{A_0}{4\pi d} + \frac{U_2}{2U_1}\frac{B_0}{4\pi d}. \quad (89)$$

Le cas où la largeur des fentes est égale à la largeur des barreaux se présente comme particulièrement simple, puisqu'il suffit, pour avoir A_0 de résoudre le système d'équation constitué par la première équation du groupe (55) et les équations du groupe (56), B_0 s'obtenant de la même manière à partir de la première équation du groupe (72) et l'ensemble du groupe (74).

La formule générale (86) nous donne, pour la capacité C_1 et pour le coefficient d'influence à travers la grille C_{20}

$$C_1 = \frac{A_0}{2\pi d U_1} \quad \text{et} \quad C_{20} = \frac{A_0 - B_0}{8\pi d U_1}. \quad (90)$$

Nous trouvons là encore une occasion de mettre à l'épreuve notre méthode d'approximations successives en confrontant les résultats (90) avec ceux de la première méthode qui deviennent, dans le cas particulier envisagé ici où a est égal à b

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2(\pi d + 2a\,\mathrm{L}\sqrt{2})} \\ \text{et} \quad C_{20} &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{\pi d + 2a\,\mathrm{L}\sqrt{2}} - \frac{1}{\pi d}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (90')$$

Pour ce qui concerne C_1, l'approximation que nous avons déjà utilisée pour obtenir les résultats (62) conduit à

$$\frac{A_0}{U_1} = \frac{\delta}{\delta + 0{,}417},$$

d'où, d'après (90)

$$C_1 = \frac{1}{2(\pi d + 0{,}834a)},$$

au lieu de, d'après (90')

$$C_1 = \frac{1}{2(\pi d + 0{,}692a)}.$$

D'autre part, pour la grille infiniment mince, E est nul et le groupe (74), dont les équations deviennent homogènes en B_{2p+1} avec un déterminant non nul, donnent des valeurs nulles pour ces B_{2p+1} de sorte que la première équation (72) nous conduit à

$$\frac{B_0}{U_1} = 1,$$

ce qui, substitué dans la seconde des équations (90) donne

$$C_{20} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{\pi d + 0{,}834a} - \frac{1}{\pi d}\right],$$

au lieu de

$$C_{20} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{\pi d + 0{,}692a} - \frac{1}{\pi d}\right].$$

L'approximation suivante, où l'on conserve trois des A_{2p+1}, soit A_1 A_3 et A_5, donne

$$C_1 = \frac{1}{2(\pi d + 0{,}781a)}$$

et

$$C_{20} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{\pi d + 0{,}781a} - \frac{1}{\pi d}\right].$$

La suivante encore, avec quatre inconnues d'indice impair, A_1 A_3, A_5 et A dans les équations (56) et la première des équations (54) donne

$$C_1 = \frac{1}{2(\pi d + 0{,}760a)}$$

et

$$C_{20} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{\pi d + 0{,}760a} - \frac{1}{\pi d}\right].$$

On voit ainsi les approximations successives converger vers la valeur exacte.

Problème électrostatique général de la grille entre plateaux parallèles. — Nous nous sommes limités jusqu'ici au cas du système symétrique où les plateaux sont placés de part et d'autre de la grille à égale distance de celle-ci et la solution (83) pour des potentiels quelconques des trois conducteurs a été obtenue par superposition de deux solutions particulières U' et U'' qui correspondent aux deux cas que nous pouvons appeler respectivement le cas symétrique où les plateaux sont tous deux au même potentiel pris pour origine, et le cas antisymétrique où les différences de potentiel entre la grille et les deux plateaux sont égales et de signes contraires. Il nous sera utile d'expliciter ces deux solutions particulières U' et U'' en fonction de ξ et η ainsi que les fonctions conjuguées φ' et φ'' qui leur correspondent. Si nous conservons les mêmes axes de coordonnées (*fig.* 6) et les mêmes notations que précédemment, à ceci près que, dans la solution symétrique la vitesse v_0 de la grille sera remplacée par son potentiel U_1, la fonction U' est donnée entre CD et GH, c'est-à-dire pour η variant entre 0 et δ, par l'expression analogue à (40)

$$U' = A_0\frac{\eta}{\delta} + \sum A_n \frac{\operatorname{sh} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta}\cos 2n\xi. \quad (91)$$

La solution entre GH et AB, valable quand η varie entre δ et 2δ doit être symétrique de la précédente par rapport à GH; on a donc, dans l'intervalle considéré

$$U' = A_0\frac{2\delta - \eta}{\delta} + \sum A_n \frac{\operatorname{sh} 2n(2\delta - \eta)}{\operatorname{sh} 2n\delta}\cos 2n\xi. \quad (92)$$

Cette solution s'annule bien sur AB, et les deux fonctions (91) et (92) se raccordent bien sur les segments de GH situés à l'intérieur des fentes sans présenter aucune discontinuité dans les valeurs de U et dans celles de $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ qui y est nul.

La fonction φ étant relié à U par les conditions (75), on voit qu'il correspond à (91), pour la région comprise entre CD et GH, c'est-à-dire pour $0 < \eta < \delta$

$$\varphi' = A_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum A_n \frac{\operatorname{ch} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta} \sin 2n\xi \qquad (93)$$

et à (92) pour la région $\delta < \eta < 2\delta$

$$\varphi' = -A_0 \frac{\xi}{\delta} - \sum A_n \frac{\operatorname{ch} 2n(2\delta - \eta)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \sin 2n\xi. \qquad (94)$$

De même, la solution antisymétrique donnera les formules correspondantes

$$U'' = B_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum B_n \frac{\operatorname{sh} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos 2n\xi, \qquad (95)$$

$$U'' = 2U_1 - \frac{B_0(2\delta - \eta)}{\delta} - \sum B_n \frac{\operatorname{sh} 2n(2\delta - \eta)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos 2n\xi, \qquad (96)$$

$$\varphi'' = B_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum B_n \frac{\operatorname{ch} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta} \sin 2n\xi, \qquad (97)$$

$$\varphi'' = B_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum B_n \frac{\operatorname{ch} 2n(2\delta - \eta)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \sin 2n\xi. \qquad (98)$$

Ainsi que nous l'avons vu précédemment, la fonction de flux φ permet de calculer les charges présentes sur les plateaux; pour le plateau CD, il faut faire η égal à 0 dans les formules (93) et (97) et prendre la valeur de φ pour $\xi = \pi$; en désignant par Q'_0 et Q''_0 les charges présentes par unité de surface de CD dans la solution symétrique et la solution antisymétrique respectivement, on obtient, en grandeur et en signe

$$\left.\begin{aligned} Q'_0 &= -\frac{\varphi'_\pi}{4\pi(a+b)} = -\frac{A_0}{4\pi d}, \\ Q''_0 &= -\frac{\varphi''_\pi}{4\pi(a+b)} = -\frac{B_0}{4\pi d}. \end{aligned}\right\} \qquad (99)$$

On aura de même sur le plateau AB, en remarquant que la normale extérieure y est dirigée dans le sens négatif des η

$$\left.\begin{aligned} Q'_2 &= -\frac{\varphi''_\pi}{4\pi(a+b)} = -\frac{A_0}{4\pi d}, \\ Q''_2 &= +\frac{\varphi''_\pi}{4\pi(a+b)} = +\frac{B_0}{4\pi d}. \end{aligned}\right\} \qquad (100)$$

La charge de la grille par unité de surface est égale et opposée à la somme des charges présentes sur les plateaux, donc

$$Q'_1 = \frac{A_0}{2\pi d}, \qquad Q''_1 = 0.$$

Lorsque la grille et le plateau AB ont des potentiels quelconques U_1 et U_2 par rapport à CD nous avons vu que la distribution du potentiel est donnée par (83)

$$U = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right) U' + \frac{U_2}{2U_1} U''.$$

On aura donc

$$\varphi = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right) \varphi' + \frac{U_2}{2U_1} \varphi''$$

et pour les charges, en posant

$$a_0 = \frac{A_0}{U_1}, \qquad b_0 = \frac{B_0}{U_1}, \qquad (101)$$

on obtient

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= \frac{a_0 - b_0}{8\pi d} U_2 - \frac{a_0}{4\pi d} U_1, \\ Q_2 &= \frac{a_0 - b_0}{8\pi d} U_2 - \frac{a_0}{4\pi d} U_1, \\ Q_1 &= \frac{a_0}{2\pi d} U_1 - \frac{a_0}{4\pi d} U_2. \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

Il en résulte en particulier pour la capacité de la grille et pour le coefficient d'influence mutuel des plateaux à travers la grille les valeurs, par unité de surface

$$C_1 = \frac{a_0}{2\pi d}, \qquad C_{02} = \frac{a_0 - b_0}{8\pi d}. \qquad (103)$$

Les coefficients a_0 et b_0, purement numériques, s'obtiennent par la résolution des systèmes d'équations linéaires établis pour la solution de chacun des deux problèmes symétrique (a_0) et antisymétrique (b_0).

Quand d est suffisamment grand, il résulte de la forme particulière que prennent alors nos groupes d'équations linéaires, que a_0 et b_0 se présentent sous les formes

$$a_0 = \frac{\delta}{\delta + \alpha}, \qquad b_0 = \frac{\delta}{\delta + \beta}, \qquad (104)$$

où les quantités α et β dépendent uniquement de la grille, par l'intermédiaire de ε et de ρ. Quand ε est nul (grille infiniment mince), nous avons vu que les valeurs limites de α et β sont

$$\alpha = -\mathrm{L} \sin \frac{\pi\rho}{2}, \qquad \beta = 0.$$

Quand ρ est nul, la grille disparaît, α devient infini et β nul, de sorte que a_0 est nul et b_0 égal à l'unité. Pour ρ égal à 1, les fentes disparaissent, la grille devient une plaque continue, α et β deviennent égaux à $-\varepsilon$.

En substituant la valeur (104) de a_0 dans l'expression (103) de la capacité C_1, on obtient pour celle-ci

$$C_1 = \frac{1}{2[\pi d + \alpha(a+b)]}, \qquad (105)$$

avec ce résultat que l'influence des fentes sur la capacité de la grille, équivaut à une augmentation de la distance des plateaux de chaque côté de la

grille, égale à

$$\frac{\alpha-\varepsilon}{\pi}(a+b).$$

La simplicité de ce résultat est liée au fait que, lorsque la distance d devient suffisamment grande par rapport à $a+b$, le champ devient uniforme au voisinage des plateaux et que, dans ces conditions, pour une même distribution du champ au voisinage de la grille, et par conséquent pour une même distribution des charges à la surface de celle-ci, un accroissement de la distance et produit simplement un accroissement proportionnel dans les différences de potentiel U_1 et U_2. Ces différences de potentiel sont donc des fonctions linéaires de la distance quand celle-ci devient suffisante, et c'est bien ce que traduit, en particulier, la forme (105) de la capacité de la grille.

Cette uniformité du champ au voisinage des plateaux permet également de résoudre le problème de la distribution du potentiel pour des valeurs données de celui-ci sur la grille et les plateaux lorsque ceux-ci sont à des distances différentes de la grille, ces distances d et d' restant suffisamment grandes par rapport à la période $a+b$.

Soit $A'B'$ (*fig.* 6) la position du plateau supérieur, à distance d' du plan médian de la grille, le plateau inférieur restant à distance d. Soit U'_2 le potentiel sur le plan $A'B'$, potentiel qui sera constant dans toute l'étendue de ce plan, en raison de l'uniformité du champ entre AB et A'B'. Ce champ a pour valeur, en vertu de (83)

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(1-\frac{U_2}{2U_1}\right)\frac{\partial U'}{\partial y}+\frac{U_2}{2U_1}\frac{\partial U''}{\partial y}. \qquad (106)$$

Les valeurs à prendre pour U' et U'' sont celles qui conviennent pour la région supérieure du domaine, et qui sont données par les formules (92) et (96) respectivement. On en déduit

$$\frac{\partial U'}{\partial y}=-\frac{A_0}{d},\qquad \frac{\partial U''}{\partial y}=\frac{B_0}{d}, \qquad (107)$$

pour les valeurs de η voisines de 2δ, où $\operatorname{sh}2n\delta$ est grand.

De même on déduit de (106), en y portant les valeurs (107)

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{U_2}{2d}(a_0+b_0)-\frac{U_1}{d}a_0.$$

On a d'ailleurs, puisque ce champ est constant entre AB et $A'B'$

$$U'_2=U_2-(d-d')\frac{\partial U}{\partial y}$$
$$=\frac{U_2}{2d}[2d-(a_0+b_0)(d-d')]+\frac{U_1}{d}a_0(d-d'),$$

d'où

$$U_2=\frac{2dU'_2-2(d-d')a_0U_1}{2d-(a_0+b_0)(d-d')}.$$

Il suffit de porter cette expression de U_2 dans la formule (83) pour avoir la distribution du potentiel entre la grille et les deux plateaux $A'B'$ et CD lorsque le potentiel de A'B' est U'_2 et celui de la grille U, celui de CD étant toujours pris pour origine

$$U=U'+\frac{dU'_2-(d-d')a_0U_1}{2d-(d-d')(a_0+b_0)}\,\frac{U''-U'}{U_1}. \qquad (108)$$

La fonction de flux φ sera par conséquent

$$\varphi=\varphi'+\frac{dU'_2-(d-d')a_0U_1}{2d-(d-d')(a_0+b_0)}\,\frac{\varphi''-\varphi'}{U_1}. \qquad (109)$$

En tenant compte de (99) et (100), on obtient pour les charges par unité de surface des plateaux et de la grille

$$\left.\begin{aligned}
Q_0&=\frac{\left\{\begin{matrix}(a_0-b_0)dU'_2\\ -2[a_0d-a_0b_0(d-d')]U_1\end{matrix}\right\}}{4\pi d[2d-(a_0+b_0)(d-d')]},\\
Q'_2&=\frac{(a_0+b_0)U'_2-2a_0U_1}{4\pi[2d-(a_0+b_0)(d-d')]},\\
Q_1&=\frac{[2a_0d-a_0b_0(d-d')]U_1-a_0dU'_2}{2\pi d[2d-(a_0+b_0)(d-d')]}.
\end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

De là résultent les valeurs de la capacité C_1 de la grille et du coefficient d'influence mutuelle des plateaux à travers la grille C_{02}

$$\left.\begin{aligned}
C_1&=\frac{2a_0d-a_0b_0(d-d')}{2\pi d[2d-(a_0+b_0)(d-d')]},\\
C_{02}&=\frac{a_0-b_0}{4\pi[2d-(a_0+b_0)(d-d')]}.
\end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

Quand d est égal à d' on retrouve bien les expressions (103) que nous avions obtenues dans le cas symétrique.

Enfin, dans le cas de la plaque pleine, lorsque les fentes de la grille ont une largeur a nulle, les constantes α et β des formules (104) sont égales à $-\varepsilon$, on a donc

$$a_0=b_0=\frac{\delta}{\delta-\varepsilon}=\frac{d}{d-c}$$

et les formules (111) deviennent

$$C_1=\frac{1}{4\pi(d-c)}+\frac{1}{4\pi(d'-c)},$$
$$C_{02}=0,$$

comme il est raisonnable, puisque la plaque est à des distances $d-c$ et $d'-c$ des deux plateaux, et que cette plaque pleine fait complétement écran à l'influence mutuelle des plateaux situés de part et d'autre d'elle.

Traitement direct du cas dissymétrique par la méthode des séries trigonométriques. — Je vais, pour terminer, traiter directement, par la méthode des séries trigonométriques le cas général dissymétrique de la grille placée entre deux plateaux situés à des distances d et d' de part et d'autre du plan médian de celle-ci. Soient de nouveau o, U_1, U_2' les potentiels imposés respectivement au plateau CD, à la grille et au plateau A′B′. La distribution du potentiel entre CD et le plan médian GH sera donnée par

$$u = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum A_n \frac{\operatorname{sh} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos 2n\xi.$$

La distribution entre GH et A′B′ sera

$$\left.\begin{aligned} u' &= U'_2 - A'_0 \frac{\delta + \delta' - \eta}{\delta'} \\ &\quad - \sum A'_n \frac{\operatorname{sh} 2n(\delta + \delta' - \eta)}{\operatorname{sh} 2n\delta'} \cos 2n\xi. \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

u s'annule sur CD en même temps que η et u' devient égal à U'_2 sur A′B′ pour η égal à $\delta - \delta'$. Les conditions à remplir par les A_n et les A'_n doivent traduire les faits suivants :

1° u doit être égal à U_1 sur RS en même temps que u' est égal à U_1 sur VT;

2° u doit être égal à U_1 sur SN et u' égal à U_1 sur NT;

3° Les deux fonctions u et u' doivent se raccorder sur NM′ de façon que u et u' y prennent la même valeur en chaque point ainsi que leurs dérivées premières par rapport à η et à ξ.

Ainsi les deux fonctions harmoniques se raccorderont puisqu'il n'existera sur les bandes médianes des fentes, telles que NM′, aucune couche double ni simple correspondant aux surfaces de discontinuité du potentiel ou du champ.

Nous aurons ainsi trois groupes d'équations linéaires auxquelles doivent satisfaire les A_n et les A'_n

I. Le premier groupe sera analogue à (43) et s'écrira

$$\left.\begin{aligned} &U_1 = A_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{1}{\pi\rho} \sum \frac{A_n}{n} \frac{\operatorname{sh} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \sin n\pi\rho, \\ &\sum \frac{nA_n}{n^2\rho^2 - m^2} \frac{\operatorname{sh} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \sin n\pi\rho = 0; \\ &U_1 = U'_2 - A_0 \frac{\delta' - \varepsilon}{\delta'} - \frac{1}{\pi\rho} \sum \frac{A'_n}{n} \\ &\qquad \times \frac{\operatorname{sh} 2n(\delta' - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta'} \sin n\pi\rho, \\ &\sum \frac{nA'_n}{n^2\rho^2 - m^2} \frac{\operatorname{sh} 2n(\delta' - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta'} \sin n\pi\rho = 0. \end{aligned}\right\} \quad (113)$$

II. La seconde condition conduit à des équations analogues à (51)

$$\left.\begin{aligned} &U_1 = A_0 \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\delta}\right) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^\infty \frac{A_n}{n} \\ &\qquad \times \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - \operatorname{ch} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos n\pi\rho, \\ &\sum_{n=1}^\infty \frac{nA_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - \operatorname{ch} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \\ &\qquad \times \cos n\pi\rho = 0, \\ &\sum_{n=1}^\infty \frac{A_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta}\right] \\ &\qquad \times \cos n\pi\rho = 0; \\ &U_1 = U'_2 - A'_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta'}\right) - \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^\infty \frac{A'_n}{n} \\ &\qquad \times \frac{\operatorname{ch} 2n\delta' - \operatorname{ch} 2n(\delta' - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta'} \cos n\pi\rho, \\ &\sum_1^\infty \frac{nA'_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\operatorname{ch} 2n\delta' - \operatorname{ch} 2n(\delta' - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta'} \\ &\qquad \times \cos n\pi\rho = 0, \\ &\sum_1^\infty \frac{A'_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} 2n(\delta' - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta'}\right] \\ &\qquad \times \cos n\pi\rho = 0. \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

III. La continuité entre u et u' le long de NM′ donne

$$\left.\begin{aligned} &U'_2 = A_0 + A'_0 + \frac{1}{\pi(1 - \rho)} \\ &\qquad \times \sum_1^\infty (-1)^n \frac{A_n + A'_n}{n} \sin n\pi(1 - \rho), \\ &\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n(A_n + A'_n)}{n^2(1 - \rho)^2 - m^2} \sin n\pi(1 - \rho) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

La continuité entre $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ et $\frac{\partial u'}{\partial \eta}$ le long de NM′ donne

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A_0}{\delta} - \frac{A'_0}{\delta'} + \frac{1}{\pi(1 - \rho)} \sum (-1)^n \\ &\qquad \times (A_n \coth 2n\delta - A'_n \coth 2n\delta') \\ &\qquad \times \sin n\pi(1 - \rho) = 0, \\ &\sum \frac{(-1)^n n^2}{n^2(1 - \rho)^2 - m^2} \\ &\qquad \times (A_n \coth 2n\delta - \coth 2n\delta') \\ &\qquad \times \sin n\pi(1 - \rho) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (116)$$

La continuité entre $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial u'}{\partial \xi}$ le long de NM′ donne

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n n^2 (A_n + A'_n)}{n^2(1 - \rho)^2 - m^2} \cos n\pi(1 - \rho) = 0. \quad (117)$$

En liaison avec la distribution (112) du potentiel, celle de la fonction conjuguée φ prend dans les

deux régions situées de part et d'autre du plan médian GH les valeurs

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= A_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum A_n \frac{\operatorname{ch} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta} \sin 2n\xi, \\
\varphi' &= A'_0 \frac{\xi}{\delta'} + \sum A'_n \frac{\operatorname{ch} 2n(\delta + \delta' - \eta)}{\operatorname{sh} 2n\delta'} \sin 2n\xi.
\end{aligned}\right\} \quad (118)$$

Comme précédemment, on en déduit pour les charges Q_0 et Q_2 par unité de surface des plateaux CD et A'B'

$$Q_0 = -\frac{A_0}{4\pi d}, \qquad Q_2 = \frac{A'_0}{4\pi d'}. \quad (119)$$

La résolution de notre système d'équations linéaires donnera A_0 et A'_0 en fonction linéaire de U_1 et U'_2 et l'on déduira immédiatement de (119) les coefficients d'influence et les capacités.

La résolution du système d'équations se trouve extrêmement simplifiée dans le cas où la largeur a des fentes est égale à celle b des barreaux, c'est-à-dire où ρ est égal à $\frac{1}{2}$.

Il est en effet possible dans ce cas, en procédant comme nous l'avons fait antérieurement, de former un groupe d'équations linéaires ne renfermant plus, en dehors de A_0 et A'_0 que les inconnues d'indice impair A_{2p+1} et A'_{2p+1}. Ce groupe est le suivant

$$\left.\begin{aligned}
& U_1 \frac{\delta}{\delta - \varepsilon} = A_0 + \frac{2}{\pi} \sum_0 \frac{(-1)^p S_{0p}}{2p+1} A_{2p+2}, \\
& (U'_2 - U_1) \frac{\delta'}{\delta' - \varepsilon} = A'_0 + \frac{2}{\pi} \sum_0 \frac{(-1)^p S'_{0p}}{2p+1} A'_{2p+1}, \\
& U'_2 = A_0 + A'_0 - \frac{2}{\pi} \sum_0 \frac{(-1)^p}{2p+1} (A_{2p+1} + A'_{2p+1}), \\
& \frac{A_0}{\delta} - \frac{A'_0}{\delta} = \frac{2}{\pi} \sum_0 (-1)^p \\
& \qquad \times [\coth 2(2p+1)\delta\, A_{2p+1} \\
& \qquad\qquad - \coth 2(2p+1)\delta' A'_{2p+1}], \\
& \sum_{=0} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 - 4m^2} \\
& \qquad \times [(1 + S_{mp}) A_{2p+1} + (1 + S'_{mp}) A'_{2p+1}] = 0, \\
& 0 = \sum_{p=0} \frac{(-1)^p (2p+1)^2}{(2p+1)^2 - 4m^2} \\
& \qquad \times \left[\left(\frac{2m}{2p+1} \coth 4m\delta\, S_{mp} \right.\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \coth 2(2p+1)\delta \right) A_{2p+1} \\
& \qquad - \left(\frac{2m}{2p+1} \coth 4m\delta' S'_{mp} \right. \\
& \qquad\qquad \left.\left. + \coth 2(2p+1)\delta' \right) A'_{2p+1} \right]
\end{aligned}\right\} \quad (120)$$

Avec les notations

$$S_{mp} = \frac{\operatorname{sh} 2(2p+1)(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2(2p+1)\delta} \, \frac{\operatorname{sh} 4m\delta}{\operatorname{sh} 4m(\delta - \varepsilon)},$$

$$S'_{mp} = \frac{\operatorname{sh} 2(2p+1)(\delta' - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2(2p+1)\delta'} \, \frac{\operatorname{sh} 4m\delta'}{\operatorname{sh} 4m(\delta' - \varepsilon)},$$

$$S_{0p} = \frac{\operatorname{sh} 2(2p+1)(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2(2p+1)\delta} \, \frac{\delta}{\delta - \varepsilon},$$

$$S'_{0p} = \frac{\operatorname{sh} 2(2p+1)(\delta' - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2(2p+1)\delta'} \, \frac{\delta'}{\delta' - \varepsilon}.$$

L'élimination de A_0 et A'_0 entre les quatre premières des équations (120) fournit les deux équations

$$\left.\begin{aligned}
& \frac{U'_2 \varepsilon}{\delta' - \varepsilon} - \frac{U_1 \varepsilon (\delta - \delta')}{(\delta - \varepsilon)(\delta' - \varepsilon)} \\
& \quad = \frac{2}{\pi} \sum \frac{(-1)^p}{2p+1} [(S_{0p} + 1) A_{1p+1} \\
& \qquad\qquad + (S'_{0p} + 1) A'_{2p+1}], \\
& U_1 \left(\frac{1}{\delta - \varepsilon} + \frac{1}{\delta' - \varepsilon} \right) - \frac{U'_2}{\delta' - \varepsilon} \\
& \quad = \frac{2}{\pi} \sum (-1)^p \left[\left(\frac{S_{0p}}{\delta(2p+1)} \right.\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \coth 2(2p+1)\delta \right) A_{2p+1} \\
& \qquad - \left(\frac{S'_{0p}}{\delta'(2p+1)} \right. \\
& \qquad\qquad \left. + \coth 2(2p+1)\delta' \right) \\
& \qquad\qquad\qquad \left. \times A'_{2p+1} \right].
\end{aligned}\right\} \quad (121)$$

Ces dernières équations, jointes à celles des deux dernières lignes de (120) permettent de déterminer les A_{2p+1} et les A'_{2p+1} qui, portés dans les deux premières équations (120) donneront A_0 et A'_0.

Une approximation déjà suffisante consistera à donner à p les valeurs 0, 1, 2, et à prendre deux équations dans chacune des deux dernières lignes de (120) en donnant à m les valeurs 1 et 2.

Pour aller plus loin et en choisissant pour p les $p + 1$ valeurs 0, 1, 2, ..., p ce qui donne $2(p+1)$ inconnues A_{2p+1} et A'_{2p+1}, on donnera à m les valeurs 1, 2, ..., p dans les deux dernières lignes de (120), ce qui fournira avec les deux équations (121) les $2p + 2$ équations nécessaires pour déterminer ces $2p + 2$ inconnues.

Travail fait à Troyes en 1942-1943.

SUR LES ÉQUATIONS D'ONDES DES CORPUSCULES DE SPIN $\frac{h}{4\pi}$ ET LEURS SOLUTIONS DANS LES CHAMPS NUCLÉAIRES GÉNÉRAUX

Par M. GÉRARD PETIAU.

Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — Étude de l'équation d'ondes relativiste de Dirac représentant le corpuscule de spin $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ dans le cas où ce corpuscule est soumis aux champs de forces que l'on considère en théorie du noyau, plus généraux que le champ électromagnétique, et s'exerçant sur le corpuscule par l'intermédiaire de ses diverses grandeurs caractéristiques représentées par les seize opérateurs matrices de la théorie du corpuscule de Dirac. Après avoir discuté les approximations non relativistes correspondantes et notamment les caractères des couplages spin-orbites, nous examinons en détail comment l'extension des méthodes de Dirac et de Darwin permet la résolution de l'équation d'ondes par séparation des variables dans le cas des interactions centrales. L'existence dans trois cas remarquables de l'intégrale première de Dirac permet par l'extension d'une méthode de Temple de calculer les niveaux d'énergie dans trois cas particuliers et d'écrire explicitement les solutions au moyen de combinaisons de fonctions radiales et de fonctions angulaires dans le cas d'interactions d'intensités constantes.

I. — La représentation de l'électron par des fonctions d'ondes solutions de l'équation de Dirac à permis d'établir une théorie cohérente et en accord avec les résultats expérimentaux pour l'atome d'hydrogène, tout au moins lorsque l'on néglige les effets d'origine nucléaire, ce problème étant ramené à la recherche des solutions correspondant aux états d'énergie stationnaire d'une charge électrique élémentaire dans un champ électrostatique coulombien.

Plus généralement, on admet aujourd'hui que l'équation d'ondes de Dirac permet de représenter tout corpuscule de spin $\frac{h}{4\pi}$ et notamment le proton, le neutron, et même certains types de mésons auxquels on attribue le spin $\frac{h}{4\pi}$. De telles particules lorsqu'elles sont chargées subissent les actions électromagnétiques de type classique s'exerçant par l'intermédiaire des potentiels électromagnétiques et en outre des actions directes des champs électromagnétiques par l'intermédiaire de leurs moments électromagnétiques propres. De plus, ces particules sont susceptibles de subir des actions d'un type plus général que nous appellerons nucléaire ou mésique. L'examen du comportement des particules dans ces champs généraux et en particulier, la recherche des états stationnaires, nous paraît nécessaire pour l'édification d'une théorie des systèmes nucléaires et la discussion des conditions de la diffusion des particules élémentaires par les noyaux atomiques.

Nous représenterons le corpuscule de spin $\frac{h}{4\pi}$, en l'absence d'interaction, par les fonctions d'ondes, solutions sous les conditions ordinaires de la Mécanique ondulatoire, de l'équation

$$[p_0 + (\mathbf{p}.\alpha) + m_0 c \alpha_4]\psi = 0, \tag{1}$$

avec

$$p_0 = -i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} = i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi};$$

α, (α_1, α_2, α_3), α_4 forment un système de quatre matrices du quatrième rang telles que

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

que nous représenterons suivant la méthode de Dirac au moyen de matrices du second rang σ et ρ, soient σ_1, σ_2, σ_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3 telles que

$$\sigma_p\sigma_q = -i\sigma_r, \qquad \rho_p\rho_q = -i\rho_r \qquad (p, q, r = 1, 2, 3) \tag{2}$$

en posant

$$(\alpha)_{ij,kl} = (\sigma)_{ik}(\rho_1)_{jl}, \qquad (\alpha_4)_{ij,kl} = \delta_{ik}(\rho_3)_{jl}$$
$$(i, j, k, l = 1, 2).$$

Nous adopterons pour les matrices σ et ρ la représentation

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1 \text{ ou } \rho_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \\ \sigma_2 \text{ ou } \rho_2 = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}; \qquad \sigma_3 \text{ ou } \rho_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.\end{array}\right\} \tag{3}$$

Les matrices α, α_4 permettent de former un système

de 16 matrices linéairement indépendantes représentant les grandeurs caractéristiques du corpuscule de spin $\frac{h}{4\pi}$

$$\alpha_4;\qquad \alpha_0 = 1,\quad \boldsymbol{\alpha};$$

$$\sigma_0 = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \rho_1,\quad \boldsymbol{\sigma}\qquad (\sigma_p = i\alpha_q\alpha_r);$$

$$\boldsymbol{\pi} = i\boldsymbol{\alpha}\alpha_4 = -\boldsymbol{\sigma}\rho_2,\qquad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\sigma}\rho_3;\qquad \alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \rho_2.$$

Dans le domaine où s'exercent les interactions que nous allons considérer, l'équation (1) sera remplacée par

$$[p_0 + (\mathbf{p}.\boldsymbol{\alpha}) + m_0 c\alpha_4 + H_1]\psi = 0, \tag{4}$$

H_1 étant un opérateur d'interaction que nous écrirons dans le cas général

$$\begin{aligned} H_1 = {} & I_1\alpha_4 + [U_0 + (\mathbf{U}.\boldsymbol{\alpha})] \\ & + [(\mathbf{P}.\boldsymbol{\pi}) + (\mathbf{M}.\boldsymbol{\mu})] + [S_0\sigma_0 + (\mathbf{S}.\boldsymbol{\sigma})] + I_2\alpha_5, \end{aligned} \tag{5}$$

I_1 est un invariant par rapport aux transformations de Lorentz;
U_0, $\mathbf{U}$ un quadrivecteur;
$\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ un tenseur antisymétrique du second ordre;
S_0, $\mathbf{S}$ un pseudo-vecteur;
I_2 un pseudo-invariant.

Nous nous proposons ici de discuter la possibilité d'extension dans le cas de l'opérateur d'interaction H_1 de la théorie ([1]) que l'on développe dans le cas où cet opérateur se réduit au terme

$$U_0 = -\frac{e^2 Z}{cr}.$$

Ce problème a déjà été abordé dans des cas particuliers par de nombreux auteurs. C'est ainsi que l'introduction du terme $(\mathbf{U}.\boldsymbol{\alpha})$, avec $\mathbf{U} = \frac{e}{c}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ potentiel vecteur correspondant au champ magnétique dipolaire du noyau, a été considéré par G. Breit, dans l'étude de la structure hyperfine des niveaux de l'atome d'hydrogène ([2]). L'introduction du terme en $(\mathbf{P}, \mathbf{M})$, dont la possibilité a été signalée par Pauli ([3]), a été utilisé par Bethe ([4]) pour étudier les possibilités d'ionisation d'une particule neutre (en l'occurence le neutrino) possédant un moment électromagnétique propre. Ce terme a été également considéré par G. Breit ([5]) dans la théorie de l'électron pour discuter l'effet du moment magnétique intrinsèque introduit par J. Schwinger ([6]). Nous avons discuté en détail la théorie de l'électron complétée par une interaction électromagnétique de ce type dans un travail précédent ([7]).

L'influence du terme en $I_1\alpha_4$, dont la possibilité de l'introduction avait été signalée par Furry ([8]), a été discutée en détail par Pais ([9]), puis par Caldirola ([10]) qui a déterminé notamment les niveaux d'énergie correspondant au cas $I_1 = \frac{\lambda}{r}$, λ étant une constante.

Signalons également que, dans un travail précédent ([11]), nous avons discuté le problème du passage d'une onde corpusculaire solution de l'équation de Dirac à travers une barrière d'interaction générale correspondant à H_1, avec toutes les grandeurs d'interactions I_1, U_0, $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, S_0, $\mathbf{S}$, I_2 constantes. Dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ([12]) nous avons également discuté brièvement l'équation d'ondes correspondant à l'approximation non relativiste de l'équation (4). Nous préciserons ici les résultats de cette Note et nous discuterons en détail le cas des interactions centrales.

II. — Nous allons examiner en détail les équations d'ondes correspondant à l'approximation non relativiste de l'équation (4).

Si nous supposons les interactions indépendantes du temps, posant

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\,e^{\frac{i}{\hbar}Wt},$$

l'équation (4) s'écrira

$$\begin{aligned} \Big\{ \frac{W}{c} & + (\mathbf{p}.\boldsymbol{\alpha}) + m_0 c\alpha_4 \\ & + I_1\alpha_4 + [U_0 + (\mathbf{U}.\boldsymbol{\alpha})] \\ & + [(\mathbf{P}.\boldsymbol{\pi}) + (\mathbf{M}.\boldsymbol{\mu})] \\ & + [S_0\sigma_0 + (\mathbf{S}.\boldsymbol{\sigma})] + I_2\alpha_5 \Big\}\psi(x, y, z) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Suivant la méthode de Darwin ([13]) nous décomposerons ce système en deux systèmes de deux équations $\varphi_i^{(1)}$ ou φ_1, $\varphi_i^{(2)}$ ou φ_2 en mettant en évidence par l'indice 1 ou 2 l'indice correspondant aux matrices ρ.

([1]) P. A. M. Dirac, *Proceed. Roy. Soc.*, 1928, A **117**, p. 610; 1928, A **118**, p. 351. L. de Broglie, L'électron magnétique.
([2]) G. Breit, Some effects of the intrinsic magnetic moment of the electron (*Phys. Rev.*, 1948, **74**, n° 6, 656-663).
([3]) W. Pauli, *Handbuch der Physik*, **24**, 1, p. 233.
([4]) H. Bethe, Ionisation power of a neutrinos with moment magnetic (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1935, **31**, p. 108-115).
([5]) G. Breit, Does the electron have an intrinsic magnetic moment (*Phys. Rev.*, 1947, **72**, p. 984; 1948, **73**, p. 1410-1411).
([6]) J. Schwinger, *Phys. Rev.* 1948, **73**, p. 415.

([7]) G. Petiau, Sur quelques propriétés des corpuscules de spin $\frac{1}{2}\,\frac{h}{2\pi}$ dans les champs électromagnétiques (*J. Phys.*, 1948, **9**, p. 228-24).
([8]) W. H. Furry, *Phys. Rev.*, 1936, **50**, p. 784.
([9]) Pais, *Phys. Rev.*, 1945, **68**, p. 227.
([10]) P. Caldirola, Sul moto di una particella di Dirac in un campo coulombiano misto (*Nuovo Cimento*, n° 1, février 1948, **5**, p. 1-7.
([11]) G. Petiau, Sur le passage des ondes corpusculaires de spin $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{2\pi}\right)$ à travers les barrières de champs nucléaires (*Revue Scientifique*, 1947, **85**, p. 1094-1106).
([12]) G. Petiau, Sur l'équation d'ondes non relativiste des corpuscules de spin $\frac{h}{4\pi}$ dans un champ nucléaire général (*C. R. Ac. Sc.*, Paris, 26 juil. 1948, **227**, p. 263-264).
([13]) G. Darwin, *Proceed. Roy. Soc.*, 1928, A **118**, p. 654.

Nous écrivons donc, au lieu de (6),

$$\left[\frac{W}{c} + m_0 c + U_0 + I_1 + [(\mathbf{S} + \mathbf{M}).\boldsymbol{\sigma}]\right]\varphi_1 + \left[\big((\mathbf{p} + \mathbf{U} - i\mathbf{P}).\boldsymbol{\sigma}\big) + S_0 + iI_2\right]\varphi_2 = 0, \qquad (7)$$

$$\left[\frac{W}{c} - m_0 c + U_0 - I_1 + [(\mathbf{S} - \mathbf{M}).\boldsymbol{\sigma}]\right]\varphi_2 + \left[\big((\mathbf{p} + \mathbf{U} + i\mathbf{P}).\boldsymbol{\sigma}\big) + S_0 - iI_2\right]\varphi_1 = 0. \qquad (8)$$

Nous passerons à l'approximation non relativiste en mettant en évidence l'énergie non relativiste E en écrivant

$$W = E + m_0 c^2$$

et en supposant $\frac{E}{c}$ négligeable devant $m_0 c$.

Si nous supposons en outre U_0, I_1, $\mathbf{S}$ et $\mathbf{M}$ négligeables devant $m_0 c$ (hypothèse de faible couplage), l'équation (7) nous donne immédiatement

$$\varphi_1 \approx -\frac{1}{2 m_0 c}\left[\big((\mathbf{p} + \mathbf{U} - i\mathbf{P}).\boldsymbol{\sigma}\big) + S_0 + iI_2\right]\varphi_2, \qquad (9)$$

et en reportant cette expression dans (8) nous obtenons pour φ_2 l'équation

$$\Big\{\frac{E}{c} + U_0 - I_1 + \big((\mathbf{S} - \mathbf{M}).\boldsymbol{\sigma}\big) - \frac{1}{2 m_0 c}\Big[(\mathbf{p} + \mathbf{U})^2 + S_0^2 + I_2^2 + \mathbf{P}^2 + \Big[\big([2\mathbf{P} \wedge (\mathbf{p} + \mathbf{U})] + 2S_0(\mathbf{p} + \mathbf{U}) - 2I_2\mathbf{P}\big).\boldsymbol{\sigma}\Big]\Big] - \frac{\hbar}{2 m_0 c}\Big[\operatorname{div}\mathbf{P} + [(\operatorname{Rot}\mathbf{U} - i\operatorname{Rot}\mathbf{P} + i\operatorname{grad} S_0 - \operatorname{grad} I_2).\boldsymbol{\sigma}]\Big]\Big\}\varphi_2 = 0. \qquad (10)$$

Si nous introduisons l'impulsion généralisée

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{p} + \mathbf{U} - (\mathbf{P} \wedge \boldsymbol{\sigma}) + S_0 \boldsymbol{\sigma}, \qquad (11)$$

l'équation (10) s'écrit encore

$$\Big\{\frac{E}{c} - \frac{1}{2 m_0 c}\boldsymbol{\Pi}^2 + U_0 - I_1 + \big((\mathbf{S} - \mathbf{M}).\boldsymbol{\sigma}\big) - \frac{1}{2 m_0 c}\Big[\big(I_2 - (\mathbf{P}.\boldsymbol{\sigma})\big)^2 - 2(\mathbf{P}^2 + S_0^2)\Big] - \frac{\hbar}{2 m_0 c}\Big[\operatorname{div}\mathbf{P} + \big((\operatorname{Rot}\mathbf{U} - \operatorname{grad} I_2).\boldsymbol{\sigma}\big)\Big]\Big\}\varphi_2 = 0. \qquad (12)$$

Nous obtenons donc, dans le cas de faible couplage et à l'approximation non relativiste, une équation de Schroedinger-Pauli généralisée contenant un terme d'énergie potentielle dépendant du spin, le terme d'énergie cinétique $\frac{1}{2 m_0 c}\boldsymbol{\Pi}^2$ dépendant également du spin par l'intermédiaire d'un vecteur impulsion généralisé $\boldsymbol{\Pi}$ dépendant explicitement du spin.

Afin de préciser et d'approfondir ce résultat, nous allons examiner quelques cas particuliers et notamment les cas ou les fonctions d'interaction ne dépendent que du rayon vecteur (interactions centrales).

1° Nous examinerons d'abord le cas où

$$H_1 = I_1 \alpha_4 + U_0 + (\mathbf{U}.\boldsymbol{\alpha}).$$

L'équation (6) se réduit à

$$\left[\frac{W}{c} + (\mathbf{p}.\boldsymbol{\alpha}) + m_0 c \alpha_4 + I_1 \alpha_4 + U_0 + (\mathbf{U}.\boldsymbol{\alpha})\right]\psi = 0. \qquad (13)$$

Si en particulier $\mathbf{U} = \operatorname{grad} \mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ étant un invariant, ce qui sera notamment le cas si $\mathbf{U}$ est central $\left[\mathbf{U} = U(r)\frac{\mathbf{x}}{r}\right]$, posant

$$\psi(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{J}}\psi'(x, y, z),$$

l'équation (13) se ramènera à

$$\left[\frac{W}{c} + (\mathbf{p}.\boldsymbol{\alpha}) + m_0 c \alpha_4 + I_1 \alpha_4 + U_0\right]\psi' = 0. \qquad (14)$$

Par suite, l'interaction vectorielle de ce type et notamment l'interaction vectorielle centrale, peut être écartée par une modification du facteur de phase.

A partir de l'équation (13) nous obtenons les deux équations en φ_1, φ_2

$$\left[2 m_0 c + \frac{E}{c} + U_0 + I_1\right]\varphi_1 + [(\mathbf{p} + \mathbf{U}).\boldsymbol{\sigma}]\varphi_2 = 0, \qquad (15)$$

$$\left[\frac{E}{c} + U_0 - I_1\right]\varphi_2 + [(\mathbf{p} + \mathbf{U}).\boldsymbol{\sigma}]\varphi_1 = 0. \qquad (16)$$

Si $E \ll m_0 c^2$, nous en tirons

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2 m_0 c + U_0 + I_1}[(\mathbf{p} + \mathbf{U}).\boldsymbol{\sigma}]\varphi_2 \qquad (17)$$

(nous ne faisons pas ici l'hypothèse de faible couplage).

Reportant cette valeur de φ_1, l'équation (16) s'écrit

$$\Big\{\frac{E}{c} + U_0 - I_1 - \frac{1}{[2 m_0 c + U_0 + I_1]} \times [(\mathbf{p} + \mathbf{U})^2 + \hbar(\operatorname{Rot}\mathbf{U}.\boldsymbol{\sigma})] - \frac{i\hbar[(\operatorname{grad}(U_0 + I_1).\boldsymbol{\sigma}][(\mathbf{p} + \mathbf{U}).\boldsymbol{\sigma}]}{[2 m_0 c + U_0 + I_1]^2}\Big\}\varphi_2 = 0. \qquad (18)$$

Posant

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{p} + \mathbf{U}, \qquad (19)$$

cette équation devient

$$\Big\{\frac{E}{c} + U_0 - I_1 - \frac{\boldsymbol{\Pi}^2}{2 m_0 c + U_0 + I_1} - \frac{\hbar}{2 m_0 c + U_0 + I_1}(\operatorname{Rot}\mathbf{U}.\boldsymbol{\sigma}) + \frac{i\hbar}{[2 m_0 c + U_0 + I_1]^2} \times \Big[\big(\operatorname{grad}(U_0 + I_1).\boldsymbol{\Pi}\big) - i\Big[\boldsymbol{\sigma}.\big(\operatorname{grad}(U_0 + I_1) \wedge \boldsymbol{\Pi}\big)\Big]\Big]\Big\}\varphi_2 = 0. \qquad (20)$$

En particulier, si l'on a $\mathbf{M} = \text{rot}\, \mathbf{U}$ (correspondant par exemple au cas électromagnétique $\mathbf{U} = \lambda \mathcal{A}$, $\mathbf{M} = \lambda \mathcal{H}$) on retrouve en première approximation et supposant le couplage électrique faible, $U_0 \ll m_0 c$, l'équation de Pauli

$$\left\{ \frac{E}{c} + U_0 - \frac{1}{2 m_0 c} [\mathbf{p} - \lambda \mathcal{A}]^2 - \frac{\hbar \lambda}{2 m_0 c} (\mathcal{H} \sigma) \right\} \varphi_2 = 0.$$

Dans le cas des interactions centrales, U rentre dans le terme de phase, et il nous reste à partir de (20), introduisant le moment orbitral

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p},$$

$$\left\{ \frac{E}{c} + U_0(r) - I_1(r) - \frac{\mathbf{p}^2}{[2 m_0 c + U_0(r) - I_1(r)]} - \frac{\frac{\partial}{\partial r}[U_0 + I_1]}{[2 m_0 c + U_0 + I_1]^2} \left[\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} - \hbar \frac{(\sigma . \mathbf{L})}{r} \right] \right\} \varphi_2 = 0. \quad (21)$$

Nous obtenons ici pour φ_2 une équation qui met en évidence les termes de couplage spin-orbite bien étudiés dans la théorie de l'électron [14].

Ces termes n'interviennent pas dans l'hypothèse de faible couplage, auquel cas nous sommes ramenés à l'équation de Schrödinger

$$\left[\frac{E}{c} + U_0(r) - I_1(r) - \frac{\mathbf{p}^2}{2 m_0 c} \right] \varphi_2 = 0. \quad (22)$$

Un cas particulier remarquable correspond à la compensation exacte de U_0 et de I_1

$$U_0(r) + I_1(r) = 0.$$

Dans ce cas le terme de couplage spin-orbite est écarté et il nous reste l'équation de Schrödinger

$$\left[\frac{E}{c} + 2 U_0(r) - \frac{\mathbf{p}^2}{2 m_0 c} \right] \varphi_2 = 0. \quad (23)$$

2° $$H_1 = \big(S_0 \sigma_0 + (\mathbf{S} . \sigma) \big) + I_2 \alpha_5.$$

Nous ne considérons d'abord que le cas de l'interaction en $I_2 \alpha_5$.

Les équations en φ_1, φ_2

$$\left. \begin{aligned} \left[2 m_0 c + \frac{E}{c} \right] \varphi_1 + \big((\mathbf{p} . \sigma) + i I_2 \big) \varphi_2 = 0, \\ \frac{E}{c} \varphi_2 + \big((\mathbf{p} . \sigma) - i I_2 \big) \varphi_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

nous donnent immédiatement sous la seule hypothèse $E \ll m_0 c^2$,

$$\left\{ \frac{E}{c} - \frac{1}{2 m_0 c} \mathbf{p}^2 - \frac{I_2^2}{2 m_0 c} + \frac{\hbar}{2 m_0 c} (\text{grad}\, I_2 . \sigma) \right\} \varphi_2 = 0 \quad (25)$$

et en particulier si $I_2 = I_2(r)$,

$$\left\{ \frac{E}{c} - \frac{1}{2 m_0 c} \mathbf{p}^2 - \frac{I_2^2(r)}{2 m_0 c} + \frac{\hbar}{2 m_0 c} (\text{grad}_r I_2) \left(\frac{\mathbf{x} . \sigma}{r} \right) \right\} \varphi_2 = 0. \quad (26)$$

Nous sommes ramenés à une équation de Schrödinger avec deux termes d'énergie potentielle, le premier $I_2^2(r)$ n'interviendra que si l'on est dans un cas de fort couplage et ce terme sera seul à intervenir si nous avons $I_2 = \text{const.}$ Le second

$$\frac{\hbar}{2 m_0 c} (\text{grad}_r I_2) \left(\frac{\mathbf{x} . \sigma}{r} \right)$$

dépend du spin et introduit un coefficient d'interaction analogue au magnéton de Bohr [on peut écrire $I_2 = g \mathcal{J}_2(r)$, $\mathcal{J}_2$ étant le champ pseudoscalaire extérieur agissant sur le corpuscule caractérisé par la pseudocharge g. $\frac{\hbar g}{2 m_0 c}$ sera un pseudomagnéton relatif à l'interaction pseudoscalaire.

Si nous considérons simultanément les interactions en S_0, $\mathbf{S}$ et I_2, nous avons les équations en φ_1, φ_2

$$\left. \begin{aligned} \left[2 m_0 c + \frac{E}{c} + (\mathbf{S} . \sigma) \right] \varphi_1 + [(\mathbf{p} . \sigma) + S_0 + i I_2] \varphi_2 = 0, \\ \left[\frac{E}{c} + (\mathbf{S} . \sigma) \right] \varphi_2 + [(\mathbf{p} . \sigma) + S_0 - i I_2] \varphi_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Si nous supposons $E \ll m_0 c^2$ et le couplage en $\mathbf{S}$ faible, $|\mathbf{S}| \ll m_0 c$, nous obtenons pour φ_2, en introduisant le moment généralisé

$$\Pi = \mathbf{p} + S_0 \sigma, \quad (28)$$

$$\left\{ \frac{E}{c} - \frac{\Pi^2}{2 m_0 c} - \frac{I_2^2 - 2 S_0^2}{2 m_0 c} + \left[\left(\mathbf{S} + \frac{\hbar}{2 m_0 c} \text{grad}\, I_2 \right) . \sigma \right] \right\} \varphi_2 = 0. \quad (29)$$

L'interaction en S_0 nous oblige à modifier la définition de l'impulsion, d'ou l'expression classique de l'énergie cinétique, mais n'introduit pas de terme d'énergie potentielle dépendant du spin.

Si S_0 n'intervient pas, nous avons deux termes d'interaction en σ. Si en particulier $\mathbf{S}$ est le gradient d'un champ pseudoscalaire (cas du champ mésique pseudoscalaire) tel que

$$\mathbf{S} = f \mathcal{S}, \qquad I_2 = g \mathcal{J}_2 \qquad \text{avec} \quad \mathcal{S} = \lambda_0\, \text{grad}\, \mathcal{J}_2,$$

nous obtiendrons l'équation

$$\left\{ \frac{E}{c} - \frac{\mathbf{p}^2}{2 m_0 c} - \frac{I_2^2}{2 m_0 c} + \left(f \lambda_0 + \frac{\hbar}{2 m_0 c} g \right) (\text{grad}\, \mathcal{J}_2 . \sigma) \right\} \varphi_2 = 0. \quad (30)$$

Si en particulier $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2(r)$ le terme d'interaction se ramènera à la forme $\text{grad}_r \mathcal{J}_2 \left(\frac{\mathbf{x} . \sigma}{r} \right)$.

On voit nettement sur l'équation (29) l'équiva-

[14] *Voir*, par exemple, pour une discussion de ces termes, Condon et Shortley, *Atomic Spectra*.

lence déjà signalée par plusieurs auteurs entre les champs en $I_2\alpha_5$ et $(\mathbf{S}.\ \sigma)$ à l'approximation non relativiste. Toutefois cette équivalence n'existe que si I_2^2 et $\mathbf{S}$ sont négligeables devant m_0c, c'est-à-dire dans le cas du faible couplage.

3° $$H_1 = (\mathbf{P}.\boldsymbol{\pi}) + (\mathbf{M}.\boldsymbol{\mu}).$$

Nous avons déjà discuté dans un Mémoire antérieur les interactions de ce type dans le cas où

$$(\mathbf{P}, \mathbf{M}) = f(\mathcal{E}, \mathcal{H}),$$

$\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ étant les champs électromagnétiques.

Les équations en φ_1 et φ_2 s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} \left[2m_0c + \frac{E}{c} + (\mathbf{M}.\boldsymbol{\sigma})\right]\varphi_1 + [(\mathbf{p}.\boldsymbol{\sigma}) - i(\mathbf{P}.\boldsymbol{\sigma})]\varphi_2 = 0,\\ \left[\frac{E}{c} - (\mathbf{M}.\boldsymbol{\sigma})\right]\varphi_2 + [(\mathbf{p}.\boldsymbol{\sigma}) + i(\mathbf{P}.\boldsymbol{\sigma})]\varphi_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Si nous supposons $E \ll m_0c^2$, $|\mathbf{M}| \ll m_0c$ (faible couplage magnétique), l'introduction de l'impulsion généralisée

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{p} + (\boldsymbol{\sigma} \wedge \mathbf{P}) \quad (32)$$

nous donne

$$\left\{\frac{E}{c} - (\mathbf{M}.\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2m_0c}[\boldsymbol{\Pi}^2 - \mathbf{P}^2 + \hbar \operatorname{div}\mathbf{P}]\right\}\varphi_2 = 0. \quad (33)$$

La considération d'une interaction en $\mathbf{P}$ introduit nécessairement une impulsion généralisée $\boldsymbol{\Pi}$ dépendant du spin. Par suite, on doit en conclure que dans le cas particulier de l'électron possédant le moment magnétique intrinsèque de Schwinger, il est nécessaire de modifier la définition de l'impulsion, notamment dans les calculs de diffusion coulombienne. Il en serait de même dans l'étude de la diffusion coulombienne d'un nucléon possédant un moment magnétique intrinsèque.

Dans le cas coulombien $\mathbf{P} = \mathrm{P}(r)\dfrac{\mathbf{x}}{r}$, $P(r) = \dfrac{\lambda}{r^2}$, l'équation (33) se réduit à

$$\left\{\frac{E}{c} - (\mathbf{M}.\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2m_0c}\left[\mathbf{p}^2 + \mathbf{P}^2(r) + 2P(r)\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L}}{r}\right)\right]\right\}\varphi_2 = 0. \quad (34)$$

4° Si nous examinons les équations (11) et (12), nous voyons que $\boldsymbol{\Pi}$ ne dépend du spin que par l'intermédiaire de $\mathbf{P}$ et de S_0.

Si nous écartons les difficultés relatives à cette dépendance en prenant $\mathbf{P} = S_0 = 0$ et si nous supposons toutes les interactions radiales

$$\left.\begin{aligned} &U_0 = U_0(r), \quad I_1 = I_1(r), \quad I_2 = I_2(r);\\ &\mathbf{S} = \frac{\mathbf{x}}{r}S(r), \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{x}}{r}M(r), \quad \mathbf{U} = \frac{\mathbf{x}}{r}U(r); \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

l'équation (12) s'écrit

$$\left\{\frac{E}{c} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0c} + U_0(r) - I_1(r) - \frac{I_2^2(r)}{2m_0c} + \left[S(r) - M(r) + \frac{\hbar}{2m_0c}\operatorname{grad}_r I_2\right]\left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\sigma}}{r}\right)\right\}\varphi_2 = 0 \quad (36)$$

ou encore, posant

$$\left.\begin{aligned} U_0(r) - I_1(r) - \frac{I_2^2(r)}{2m_0c} &= V(r),\\ S(r) - M(r) + \frac{\hbar}{2m_0c}\operatorname{grad}_r I_2(r) &= \mathcal{F}(r); \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

$$\left\{\frac{E}{c} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0c} + V(r) + \mathcal{F}(r)\left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\sigma}}{r}\right)\right\}\varphi_2 = 0. \quad (38)$$

Passant en coordonnées polaires avec

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

cette équation nous donne pour les fonctions φ_2, $(\varphi_{21}, \varphi_{22})$, le système

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{E}{c} + \frac{\hbar^2}{2m_0c}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{\hbar^2}{2m_0c}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] + V(r)\right\}\begin{vmatrix}\varphi_{21}\\ \varphi_{22}\end{vmatrix}\\ &+ \mathcal{F}(r)\begin{vmatrix} e^{i\varphi}\sin\theta\,\varphi_{22} + \cos\theta\,\varphi_{21} = 0.\\ e^{-i\varphi}\sin\theta\,\varphi_{21} - \cos\theta\,\varphi_{22} = 0.\end{vmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

Posant

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{21}(r, \theta, \varphi) &= e^{im\varphi}\varphi_{21}(r, \theta),\\ \varphi_{22} &= e^{i(m-1)\varphi}\varphi_{22}(r, \theta)\\ &(m \text{ entier}), \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

ce système s'écrit encore

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\frac{E}{c} + \frac{\hbar^2}{2m_0c}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right] + V(r)\right\} \times \left\{\begin{matrix}\varphi_{21}\\ \varphi_{22}\end{matrix}\right.\\ &+ \left\{\begin{aligned} &\frac{\hbar^2}{2m_0c}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] + \mathcal{F}(r)\cos\theta\right\}\varphi_{21} + \mathcal{F}(r)\sin\theta\,\varphi_{22} = 0,\\ &\frac{\hbar^2}{2m_0c}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{(m-1)^2}{\sin^2\theta}\right] - \mathcal{F}(r)\cos\theta\right\}\varphi_{22} + \mathcal{F}(r)\sin\theta\,\varphi_{21} = 0. \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

III. — Nous allons maintenant examiner plus en détail les conditions dans lesquelles l'extension des méthodes de Dirac [1] et de Darwin [13] permet la résolution de l'équation de Dirac dans le cas d'une interaction générale.

La méthode introduite par Dirac repose sur la caractérisation des fonctions propres ψ au moyen des valeurs de trois intégrales premières : l'énergie W, le moment cinétique total

$$\mathbf{N} = \mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}) + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} \quad (42)$$

et une intégrale particulière remarquable

$$u = \alpha_4[(\mathbf{L}.\boldsymbol{\sigma}) + \hbar], \quad (43)$$

que nous appellerons intégrale première de Dirac, qui permet notamment dans le cas de l'atome d'hydrogène de séparer les fonctions d'ondes en produits de fonctions radiales et de fonctions sphériques.

Nous allons donc d'abord examiner ici dans quels cas nous avons encore ces intégrales premières.

Nous considérerons d'abord le cas du moment cinétique total **N**.

On sait que l'équation d'ondes étant écrite sous la forme

$$\mathcal{L}\psi = [p_0 + (\mathbf{p}.\boldsymbol{\alpha}) + m_0 c \alpha_4 + H_1]\psi = 0, \tag{44}$$

pour que la grandeur correspondant à l'opérateur C soit intégrale première, c'est-à-dire telle que

$$\frac{d}{dt}\int \psi^* u \psi \, dv = 0,$$

on doit avoir entre les opérateurs C et $\mathcal{L}$ la relation

$$[C, \mathcal{L}] = C\mathcal{L} - \mathcal{L}C = 0. \tag{45}$$

On voit immédiatement que

$$\left[\mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\sigma,\ p_0 + (\mathbf{p}.\boldsymbol{\alpha}) + m_0 c \alpha_4\right] = 0.$$

Nous sommes donc amenés à chercher dans quelles conditions nous avons

$$\Big[\mathbf{N},\ I_1\alpha_4 + [U_0 + (\mathbf{U}.\boldsymbol{\alpha})] + \big((\mathbf{P}.\boldsymbol{\pi}) + (\mathbf{M}.\boldsymbol{\mu})\big) + \big(S_0 + (\mathbf{S}.\boldsymbol{\sigma})\big) + I_2\alpha_5\Big] = 0.$$

Considérons un des termes de H_1, soit $A\alpha_A$, nous avons

$$\left[\mathbf{x}\wedge\mathbf{p} - \frac{\hbar}{2}\sigma,\ A\alpha_A\right] = i\hbar[\mathbf{x}\wedge \operatorname{grad} A]\alpha_A + \frac{\hbar}{2}A[\sigma\alpha_A - \alpha_A\sigma]. \tag{46}$$

On voit immédiatement que cette expression sera nulle si nous avons

$$\alpha_A = \rho_0,\quad \rho_1,\quad \rho_2,\quad \rho_3 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{x}\wedge\operatorname{grad} A = 0,$$

condition toujours satisfaite si $A = A(r)$.

Plus généralement, soit A un vecteur radial

$$(\mathbf{A}.\alpha_A) = (\mathbf{A}.\boldsymbol{\sigma})\rho_k = A(r)\left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\sigma}}{r}\right)\rho_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Or, on voit immédiatement que

$$[(\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}), (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})\rho_k] = i\hbar\frac{A(r)}{r}[\mathbf{x}\wedge\boldsymbol{\sigma}]\rho_k,$$

$$\frac{\hbar}{2}[\sigma, (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})\rho_k] = \frac{\hbar}{2}\frac{A(r)}{r}[\sigma, (\mathbf{x}.\boldsymbol{\sigma})]\rho_k = -i\hbar\frac{A(r)}{r}[\mathbf{x}\wedge\boldsymbol{\sigma}]\rho_k,$$

d'où

$$\left[\mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\sigma, (\mathbf{A}.\boldsymbol{\sigma})\rho_k\right] = 0. \tag{47}$$

Par suite, le moment cinétique total **N** sera une intégrale première dans le cas où H_1 aura la forme générale

$$\begin{aligned} H_1 = I_1(r)\alpha_4 + U_0(r) + U(r)\left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\alpha}}{r}\right) \\ - P(r)\left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\pi}}{r}\right) - M(r)\left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\mu}}{r}\right) \\ + S_0(r)\sigma_0 + S(r)\left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\sigma}}{r}\right) + I_2(r)\alpha_5. \end{aligned} \tag{48}$$

Nous allons maintenant chercher les conditions relatives à l'hamiltonien d'interaction pour l'existence de l'intégrale première de Dirac (43).

Pour mettre celle-ci en évidence dans l'équation d'ondes on remarque que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\alpha}}{r}\right)\left(\frac{\mathbf{x}.\mathbf{p}}{r}\right) &= (\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{p}) + \left[\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}.\left(\frac{\mathbf{x}\wedge\mathbf{L}}{r}\right)\right] \\ &= (\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{p}) + i\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{x}}{r}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L}}{r}\right). \end{aligned} \tag{49}$$

L'équation (44) s'écrit alors

$$\left[p_0 + \left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\alpha}}{r}\right)\left(\frac{\mathbf{x}.\mathbf{p}}{r}\right) - i\left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\alpha}}{r}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L}}{r}\right) - m_0 c\alpha_4 + H_1\right]\psi = 0 \tag{50}$$

et en introduisant l'expression (43) de u

$$\left\{p_0 + \left(\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\alpha}}{r}\right)\left[\left(\frac{\mathbf{x}.\mathbf{p}}{r}\right) + \frac{i\hbar}{r}\right] - \left(\frac{\mathbf{x}.i\alpha\alpha_4}{r}\right)\frac{u}{r} + m_0 c\alpha_4 + H_1\right\}\psi = 0. \tag{51}$$

Pour discuter les conditions dans lesquelles u est intégrale première, nous calculerons le commutateur

$$[u\mathcal{L} - \mathcal{L}u].$$

A partir des expressions

$$\begin{aligned} &\alpha_4[(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L})(\mathbf{p}.\boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{p}.\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L})] + 2\hbar\alpha_4(\mathbf{p}.\boldsymbol{\alpha}) \\ &\quad = \rho_3\rho_1[(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L})(\mathbf{p}.\boldsymbol{\sigma}) + (\mathbf{p}.\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L}) + 2\hbar(\mathbf{p}.\boldsymbol{\sigma})], \\ &(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L})(\mathbf{p}.\boldsymbol{\sigma}) + (\mathbf{p}.\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L}) = -2\hbar(\mathbf{p}.\boldsymbol{\sigma}), \end{aligned}$$

on voit immédiatement que

$$[u,\ p_0 + (\mathbf{p}.\boldsymbol{\alpha}) + m_0 c\alpha_4] = 0, \tag{52}$$

u est donc bien intégrale première en l'absence d'interaction.

Pour discuter les conditions de commutation de u et de H_1 nous distinguerons deux cas :

a. $$H_1 = A\rho_k.$$

$$[u, H_1] = \left\{\begin{array}{l} \rho_3\rho_k[(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L})A - A(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L})] \\ \qquad (k = 0, 3), \\ \rho_3\rho_k[(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L})A + A(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{L}) + 2\hbar A] \\ \qquad (k = 1, 2). \end{array}\right\} \tag{53}$$

Remarquant que si $A = A(r)$

$$\mathbf{L}A(r) - A(r)\mathbf{L} = 0,$$

on voit que u sera intégrale première dans les deux cas

$$H_1 = U_0(r), \qquad H_1 = I_1(r)\alpha_4. \tag{54}$$

b. $$H_1 = (\mathbf{A}.\sigma)\rho_k.$$

Nous avons alors

$$uH_1 - H_1 u = \left\{ \begin{array}{l} \rho_3\rho_k[(\sigma.\mathbf{L})(\mathbf{A}.\sigma) - (\mathbf{A}.\sigma)(\sigma.\mathbf{L})] \\ \qquad (k = 0, 3), \\ \rho_3\rho_k[(\sigma.\mathbf{L})(\mathbf{A}.\sigma) \\ \qquad + (\mathbf{A}.\sigma)(\sigma.\mathbf{L}) + 2\hbar(\mathbf{A}.\sigma)] \\ \qquad (k = 1, 2). \end{array} \right. \tag{55}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} &(\sigma.\mathbf{L})(\sigma.\mathbf{A}) + (\sigma.\mathbf{A})(\sigma.\mathbf{L}) + 2\hbar(\sigma.\mathbf{A}) \\ &\quad = 2[(\mathbf{A}\wedge\mathbf{x}).\mathbf{p}] + i\hbar(\mathbf{x}.\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}) \\ &\qquad + \hbar\left[\left(\mathrm{grad}(\mathbf{x}.\mathbf{A}) - \mathbf{x}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\right).\sigma\right]. \end{aligned} \tag{56}$$

Par suite, si

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{x}}{r}A(r), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Rot}\,\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{x}\wedge\mathbf{A} = 0,$$

pour $k = 1, 2$, on aura

$$\begin{aligned} uH_1 - H_1 u = \hbar\rho_3\rho_k\Big[\Big(&\mathrm{grad}(\mathbf{x}.\mathbf{A}) \\ &- \mathbf{x}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\Big).\sigma\Big]. \end{aligned} \tag{57}$$

Tenant compte de

$$(\mathbf{x}.\mathbf{A}) = rA(r), \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{2A(r)}{r} + A'(r);$$

$$\mathrm{grad}(\mathbf{x}.\mathbf{A}) = \mathbf{x}\left[\frac{A(r)}{r} + A'(r)\right],$$

nous voyons que u est intégrale première pour

$$H_1 = A(r)\left(\frac{\mathbf{x}.\alpha}{r}\right), \qquad H_1 = P(r)\left(\mathbf{x}\frac{i\alpha\alpha_4}{r}\right). \tag{58}$$

Si $k = 0, 3$, on a

$$\begin{aligned} [u, H_1] = \rho_3\rho_k\Big[&i\hbar(\mathbf{x}\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}) \\ &+ i\Big(\sigma.[2(\mathbf{A}\wedge\mathbf{L}) \\ &\qquad - i\hbar(\mathbf{x}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{A} - \mathbf{x}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A})]\Big)\Big], \end{aligned} \tag{59}$$

mais $(\mathbf{A}\wedge\mathbf{L})$ ne s'annule pas en général et notamment si $\mathbf{A} = A(r)\frac{\mathbf{x}}{r}$, il ne peut y avoir compensation dans les termes en σ et par suite dans ce cas $[u, \mathbf{H}_1]$ ne peut s'annuler.

Nous avons donc mis en évidence quatre cas dans lesquels l'intégrale première de Dirac existe.

1° $$H_1 = U_0(r).$$

C'est le cas considéré par Dirac (atome d'hydrogène).

2° $$H_1 = I_1(r)\alpha_4.$$

C'est le cas étudié par Caldirola.

3° $$H_1 = P(r)\left(\frac{\mathbf{x}.i\alpha\alpha_4}{r}\right).$$

C'est le cas considéré par Breit.

4° $$H_1 = A(r)\left(\frac{\mathbf{x}.\alpha}{r}\right).$$

Ce cas trivial peut être écarté par modification du facteur de phase de la fonction d'ondes.

Pour utiliser cette intégrale première, Dirac a montré que ses valeurs propres sont tous les nombres entiers sauf zéro.

Le facteur α_4 ayant pour valeurs propres ± 1 et commutant avec $(\mathbf{L}.\sigma) + \hbar$, les valeurs propres de u seront $\pm$ celles de $(\mathbf{L}.\sigma) + \hbar$.

Soit

$$u\psi = \alpha_4[(\sigma.\mathbf{L}) + \hbar]\psi = j\hbar\psi.$$

Tenant compte de l'identité

$$\begin{aligned} &(\sigma.\mathbf{L})(\sigma.\mathbf{L} + \hbar) \\ &\quad = \mathbf{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \mathrm{cotg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right], \end{aligned} \tag{60}$$

posant

$$\chi = P_l^m(\theta)\,e^{im\varphi},$$

où P_l^m est le polynome de Legendre associé, on en déduit

$$(\sigma.\mathbf{L})[(\sigma.\mathbf{L}) + \hbar]\chi = \hbar^2 l(l+1)\chi. \tag{61}$$

Par suite, les valeurs propres de $(\sigma.\mathbf{L})$ sont $l\hbar$ et $-(l+1)\hbar$ et l'on a soit

$$j = \pm l, \qquad \text{soit} \quad j = \mp(l+1). \tag{62}$$

Mais, d'autre part, on a

$$u = \alpha_4[(\sigma.\mathbf{L}) + \hbar] = \alpha_4\left\{\left[\sigma.\left(\mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\sigma\right)\right] - \frac{\hbar}{2}\right\}, \tag{63}$$

$$u^2\psi = \left[\left(\mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\sigma\right)^2 + \frac{\hbar^2}{4}\right]\psi = \left[\mathbf{N}^2 + \frac{\hbar^2}{4}\right]\psi = j^2\psi, \tag{64}$$

ce qui montre que j ne peut prendre la valeur zéro. Donc j prend toutes les valeurs entières > 0 ou < 0 sauf zéro.

Dirac a remarqué que les trois matrices $(\mathbf{x}.\alpha)$, $(\mathbf{x}.i\sigma\alpha)$, α_1 forment un système de trois matrices unitaires anticommutantes, car l'on a

$$\left. \begin{array}{l} \left(\dfrac{\mathbf{x}.\alpha}{r}\right)^2 = 1, \qquad \left(\dfrac{\mathbf{x}.i\alpha\alpha_4}{r}\right)^2 = 1; \\ \left(\dfrac{\mathbf{x}.\alpha}{r}\right)\alpha_4 + \alpha_4\left(\dfrac{\mathbf{x}.\alpha}{r}\right) = 0. \end{array} \right\} \tag{65}$$

D'autre part, ces matrices commutent avec

$$\left(\frac{\mathbf{x}.\mathbf{p}}{r}\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial r} = p_r. \tag{66}$$

Par suite, si la solution ψ de l'équation d'ondes (51) dans le cas ou u est intégrale première, est telle que

$$u\psi = j\psi, \tag{67}$$

on pourra écrire

$$\psi = \chi(r)\,\Theta(\theta, \varphi)$$

et posant

$$\left(\frac{\mathbf{x}.\alpha}{r}\right) = \rho'_2, \qquad \left(\frac{\mathbf{x}.i\alpha\alpha_4}{r}\right) = \rho'_1, \tag{68}$$

$\chi(r)$ sera solution de l'équation

$$\left\{\frac{W}{c}+\rho'_2\left[p_r+\frac{i\hbar}{r}\right]-\rho'_1\frac{j}{r}+m_0c\rho_3 + I_1(r)\rho_3+U_0(r)+P(r)\rho'_1\right\}\chi(r)=0 \quad (69)$$

et par suite, les fonctions d'ondes ψ_i ne dépendront que de deux fonctions radiales

$$\chi_1(r) \quad \text{et} \quad \chi_2(r).$$

IV. — Nous allons maintenant examiner dans quelles conditions l'équation (69) admet des solutions dans le cas généralisant celui du potentiel coulombien, où nous avons

$$\left.\begin{aligned} U_0&=\hbar\left[a_0-\frac{a_1}{r}\right], \qquad I_1=\hbar\left[b_0+\frac{b_1}{r}\right],\\ P&=\hbar\left[c_0-\frac{c_1}{r}\right],\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 étant des constantes.

Nous utiliserons pour cela une extension de la méthode de Temple dans le cas coulombien ([15]).

Posant

$$\chi=\frac{1}{r}\varphi(r), \qquad \frac{W}{c}=\hbar w, \qquad m_0c=\hbar\mu_0, \quad (71)$$

l'équation (69) se réduit à

$$\left[w+a_0-\frac{a_1}{r}-i\rho'_2\frac{\partial}{\partial r} -\rho'_1\left(\frac{j-c_1}{r}-c_0\right)+\left(\mu_0+b_0+\frac{b_1}{r}\right)\rho_3\right]\varphi(r)=0, \quad (72)$$

$\varphi(r)$ représente ici un couple de fonction φ_1, φ_2 dépendant des matrices ρ', ρ_3. Pour $r\to\infty$ cette équation se réduit à

$$\left[i\rho'_2\frac{\partial}{\partial r}+w+a_0+\rho'_1c_0+\rho_3(\mu_0+b_0)\right]\varphi(r)=0, \quad (73)$$

à laquelle correspond l'équation du second ordre

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(w+a_0)^2-c_0^2-(\mu_0+b_0)^2\right]\varphi(r)=0. \quad (74)$$

Nous poserons

$$\alpha^2\beta^2=(\mu_0+b_0)^2+c_0^2-(w+a_0)^2, \quad (75)$$

$\alpha^2\beta^2>0$ correspondra aux états liés de la particule, $\alpha^2\beta^2<0$ aux états libres.

Si $\alpha^2\beta^2>0$, l'équation (74) écrite

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\alpha^2\beta^2\right]\varphi(r)=0, \quad (76)$$

admet la solution tendant vers zéro pour $r\to\infty$

$$\varphi(r)=A\,e^{-\alpha\beta r}. \quad (77)$$

([15]) Temple, *Proceed. Roy. Soc.*, 1930, A **127**, p. 349.

Nous chercherons alors une solution de (72) en remplaçant A par un polynome en r, soit

$$\varphi(r)=A(r)\,e^{-\alpha\beta r}=\sum_s A_s r^s\,e^{-\alpha\beta r}, \quad (78)$$

les constantes A_s sont ici des matrices $\begin{vmatrix}A_{s,1}\\A_{s,2}\end{vmatrix}$.

Introduisant cette expression de $\varphi(r)$ dans (72) et prenant le coefficient de r^{s-1}, on obtient immédiatement la relation entre coefficients A_s.

$$[a_1+i\rho'_2s-\rho'_1(j-c_1)+b_1\rho_3]A_s +[(w+a_0)-i\rho'_2\alpha\beta+\rho_1c_0+\rho_3(\mu_0+b_0)]A_{s-1}=0. \quad (79)$$

Si pour un indice s_0, nous avons $A_{s_0-1}=0$, avec $A_{s_0}\neq 0$, nous devons avoir

$$[a_1+i\rho'_2s_0-\rho'_1(j-c_1)+b_1\rho_3]A_{s_0}=0, \quad (80)$$

ce qui exige la relation

$$[a_1^2+s_0^2-(j-c_1)^2-b_1^2]A_{s_0}=0$$

et, par suite,

$$s_0^2=(j-c_1)^2+b_1^2-a_1^2. \quad (81)$$

Multipliant (79) par

$$w+a_0+i\rho'_2\alpha\beta-\rho_1c_0-\rho_3(\mu_0+b_0)$$

et tenant compte de la définition de $\alpha^2\beta^2$, on obtient entre A_s la relation

$$[w+a_0+i\rho'_2\alpha\beta-\rho_1c_0-\rho_3(\mu_0+b_0)] \times[a_1+i\rho'_2s-\rho'_1(j-c_1)+b_1\rho_3]A_s=0. \quad (82)$$

Si la série des A_s, s'arrête pour un indice s' tel que $A_{s'+1}=0$, on aura pour cet indice

$$[w+a_0-i\rho'_2\alpha\beta+\rho_1c_0+\rho_3(\mu_0+b_0)]A_{s'}=0. \quad (83)$$

Tenant compte de cette relation dans (82), celle-ci devient

$$a_1(w+a_0)-s'\alpha\beta+(j-c_1)c_0-b_1(\mu_0+b_0)]A_{s'}=0 \quad (84)$$

et, par suite, s' sera déterminé par la relation

$$s'\alpha\beta=a_1(w+a_0)+(j-c_1)c_0-b_1(\mu_0+b_0), \quad (85)$$

qui s'écrit encore

$$s'^2=\frac{[a_1(w+a_0)+(j-c_1)c_0-(\mu_0+b_0)b_1]^2}{(\mu_0+b_0)^2+c_0^2-(w+a_0)^2}. \quad (86)$$

Nous déduirons les valeurs de W de cette expression en écrivant

$$s'=s_0+n, \quad (87)$$

n étant un nombre entier et s_0 étant déterminé par la relation (81).

On obtient ainsi l'expression générale des

niveaux W par

$$w + a_0 = \frac{a_1[(\mu_0 + b_0)b_1 - (j - c_1)c_0]}{a_1^2 + (s_0 + n)^2}$$
$$\pm \frac{1}{a_1^2 + (s_0 + n)^2}$$
$$\times \Big[(s_0 + n)^2 \big[a_1^2\big((\mu_0 + b_0)^2 + c_0^2\big)$$
$$- \big((j - c_1)c_0 - (\mu_0 + b_0)b_1\big)^2\big]$$
$$+ (s_0 + n)^4 \big((\mu_0 + b_0)^2 + c_0^2\big)\Big]^{\frac{1}{2}}. \quad (88)$$

A partir de cette formule générale on obtient facilement les niveaux dans des cas particuliers intéressants :

1° Cas électrostatique : U_0 seul,

$$(s_0 + n)^2 = \frac{a_1^2(w + a_0)^2}{\mu_0^2 - (w + a_0)^2}, \qquad s_0^2 = j^2 - a_1^2$$
$$(s_0 > 0),$$

$$w + a_0 = \mu_0 \left[1 + \frac{a_1^2}{(n + \sqrt{j^2 - a_1^2})^2}\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (89)$$

qui pour $a_0 = 0$, nous redonne la formule de Dirac.

A l'approximation non relativiste cette formule nous donne

$$E = w - m_0 c^2 = -\frac{m_0 c^2}{2}\left[\frac{a_1}{n + |j|}\right]^2. \quad (90)$$

2° $I_1(r) = \hbar\left[b_0 + \frac{b_1}{r}\right]$ seul,

$$(s_0 + n)^2 = \frac{b_1^2(\mu_0 + b_0)^2}{(\mu_0 + b_0)^2 - w^2}, \qquad s_0^2 = j^2 + b_1^2,$$

$$w = (\mu_0 + b_0)\left[\frac{b_1^2}{(n + \sqrt{j^2 + b_1^2})^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (91)$$

et en première approximation, si $b_0 = 0$, b_1 petit devant j,

$$E = -\frac{m_0 c^2}{2}\left[\frac{b_1}{n + |j|}\right]^2, \quad (92)$$

expression analogue à celle du cas coulombien. Nous retrouvons ici les formules de Caldirola.

3° Si nous avons simultanément les champs en U_0 et I_1 avec $a_0 = b_0 = 0$ et $a_1^2 = b_1^2$, d'où $s_0 = |j|$, posant $n + |j| = N$ on obtient

$$\text{Si } a_1 = b_1, \qquad W = -m_0 c^2 \frac{N^2 - a_1^2}{N^2 + a_1^2}; \quad (93)$$

$$\text{Si } a_1 = -b_1, \qquad W = m_0 c^2 \frac{N^2 - a_1^2}{N^2 + a_1^2}. \quad (94)$$

4° $P(r) = \hbar\left[c_0 + \frac{c_1}{r}\right]$ seul,

$$(s_0 + n)^2 = \frac{(j - c_1)^2 c_0^2}{\mu_0^2 + c_0^2 - W^2}, \qquad s_0^2 = (j - c_1)^2,$$

d'où

$$W^2 = \mu_0^2 + c_0^2 - \frac{(j - c_1)^2 c_0^2}{(n + |j - c_1|)^2}. \quad (95)$$

Contrairement aux cas précédents, l'existence des niveaux est liée ici au terme en c_0.

Si $c_1 = 0$, nous obtenons simplement

$$W = \left[m_0^2 c^4 - \left(\frac{\hbar c j c_0}{n + |j|}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (96)$$

et à l'approximation non relativiste

$$E = -\frac{\hbar^2 c_0^2}{2 m_0}\left(\frac{j}{n + |j|}\right)^2. \quad (97)$$

Le terme en $\frac{c_1}{r}$ seul ne contribue qu'à un déplacement des niveaux préexistants dans les cas précédents si $a_1 \neq 0$ ou $b_1 \neq 0$ en remplaçant alors j par $j - c_1$.

C'est ainsi par exemple que, dans le cas des interactions électromagnétiques, nous obtenons si une interaction en $\frac{c_1}{r}$ due à un moment électrique s'ajoute à l'interaction coulombienne en $\frac{a_1}{r}$,

$$W = m_0 c^2 \left[1 + \frac{a_1^2}{(n + \sqrt{(j + c_1)^2 - a_1^2})^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (98)$$

Toutefois nous devons remarquer que l'introduction du terme en c_1 lève une dégénérescence sur les niveaux.

En effet, dans le cas électrostatique coulombien on avait

$$W_{n,j} = W_{n,-j}, \quad (99)$$

j n'intervenant dans la formule (89) que par son carré.

Au contraire, si le terme en c_1 intervient, nous avons

$$\left.\begin{aligned} W_{n,j} &= m_0 c^2 \left[1 + \frac{a_1^2}{(n + \sqrt{(j - c_1)^2 - a_1^2})^2}\right]^{-\frac{1}{2}}, \\ W_{n,-j} &= m_0 c^2 \left[1 + \frac{a_1^2}{(n + \sqrt{(j + c_1)^2 - a_1^2})^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (100)$$

et en première approximation

$$\frac{W_{n,j} - W_{n,-j}}{m_0 c^2} = -\frac{2 c_1 a_1^2}{(n + |j|)^3}. \quad (101)$$

Ces résultats peuvent être utilisés dans l'étude des niveaux d'énergie de l'électron dans le champ coulombien, lorsque l'on tient compte de l'existence du moment magnétique intrinsèque introduit par Schwinger, d'où le terme

$$H'_1 = \frac{\mu_e}{c}(\mathcal{E} . \pi),$$

$\mathcal{E}$ étant le champ électrique correspondant au potentiel coulombien

$$\mathcal{E}(r) = -\frac{e}{r^2},$$

d'où

$$H_1' = -\frac{\mu_e e Z}{cr^2}\left(\frac{\mathbf{x}.i\alpha\alpha_4}{r}\right). \tag{102}$$

Mais ce terme introduit dans l'équation d'ondes radiale une singularité en $\frac{1}{r^2}$.

On peut éviter celle-ci en remarquant que dans le cas électronique il s'agit d'une perturbation très faible et que, par suite, on peut en première approximation remplacer le terme en $\frac{1}{r^2}$ par $\frac{1}{r_0 r}$, où r_0 est le rayon de l'orbite de Bohr associée au nombre quantique $N = n + |j|$ soit

$$r_0 = \frac{N^2 \hbar^2}{m_0 Z e^2}.$$

Posant $\mu_e = \lambda\mu_0$, où λ est une constante,

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_0 c}, \qquad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c},$$

on voit que

$$c_1 = -\frac{\lambda\alpha^2 Z^2}{2N^2}, \qquad a_1 = \alpha Z,$$

d'où

$$\Delta_j = \frac{W_j - W_{-j}}{m_0 c^2} = \frac{\lambda\alpha^4 Z^4}{(n+|j|)^3}. \tag{103}$$

Selon J. Schwinger [6] on doit avoir $\lambda = -\frac{\alpha}{2\pi}$, d'où

$$\Delta_j = -\frac{\alpha^5 Z^4}{(2\pi)(n+|j|)^3}. \tag{104}$$

V. — Nous allons maintenant examiner de plus près la forme des solutions de l'équation d'ondes (1) dans le cas des interactions radiales en $U_0(r)$, $I_1(r)$ $P(r)$ en utilisant la méthode de Darwin mais avec la représentation utilisée par M. L. de Broglie et introduite en (1), (2), (3) pour les matrices α. Il serait toutefois possible d'exposer les résultats qui suivent en utilisant le formalisme indépendant de la représentation des matrices α développée par Franz [16] et par Sauter [17].

Avec la représentation des α considérée l'équation d'ondes qui s'écrit

$$\left[\frac{W}{c} + U_0(r) + \big(m_0 c + I_1(r)\big)\rho_3 + (\mathbf{p}.\sigma)\rho_1 - P(r)\left(\frac{\mathbf{x}.\sigma}{r}\right)\rho_2\right]\psi = 0, \tag{105}$$

se développe suivant le système

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{W}{c} + U_0 + m_0 c + I_1\right]\psi_1 + i\hbar[(\partial_x + i\,\partial_y)\psi_4 + \partial_z\psi_3] - i\frac{P}{r}[(x+iy)\psi_4 + z\psi_3] = 0,\\
&\left[\frac{W}{c} + U_0 + m_0 c + I_1\right]\psi_2 + i\hbar[(\partial_x - i\,\partial_y)\psi_3 - \partial_z\psi_4] - i\frac{P}{r}[(x-iy)\psi_3 - z\psi_4] = 0,\\
&\left[\frac{W}{c} + U_0 - (m_0 c + I_1)\right]\psi_3 + i\hbar[(\partial_x + i\,\partial_y)\psi_2 + \partial_z\psi_1] + i\frac{P}{r}[(x+iy)\psi_2 + z\psi_1] = 0,\\
&\left[\frac{W}{c} + U_0 - (m_0 c + I_1)\right]\psi_4 + i\hbar[(\partial_x - i\,\partial_y)\psi_1 - \partial_z\psi_2] + i\frac{P}{r}[(x-iy)\psi_1 - z\psi_2] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Suivant la méthode de Darwin, nous cherchons à représenter chaque ψ comme produit d'une fonction radiale et d'une seule fonction sphérique du type

$$\begin{aligned}
Y_k^u &= \frac{(k-u)!}{2^k k!} e^{iu\varphi} \sin^u\theta \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{k+u} [\cos^2\theta - 1]^k\\
&= P_k^u(\theta)\, e^{iu\varphi}.
\end{aligned} \tag{107}$$

Nous utiliserons les relations

$$\left.\begin{aligned}
(\partial_x + i\,\partial_y) f(r)\, Y_k^u &= \frac{1}{2k+1}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{k}{r}f\right) Y_{k+1}^{u+1} - (k-u)(k-u-1)\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{k+1}{r}f\right) Y_{k-1}^{u+1}\right\},\\
(\partial_x - i\,\partial_y) f(r)\, Y_k^u &= \frac{1}{2k+1}\left\{-\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{k}{r}f\right) Y_{k+1}^{u-1} + (k+u)(k+u-1)\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{k+1}{r}f\right) Y_{k-1}^{u-1}\right\},\\
\frac{\partial}{\partial z} f(r)\, Y_k^u &= \frac{1}{2k+1}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{k}{r}f\right) Y_{k+1}^{u} + (k+u)(k-u)\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{k+1}{r}f\right) Y_{k-1}^{u}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Suivant la méthode utilisée dans le cas de l'atome d'hydrogène, nous cherchons une première solution de la forme

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1 &= i a_1 F(r) Y_{k+1}^u, & \psi_3 &= a_3 G(r) Y_k^u,\\
\psi_2 &= i a_2 F(r) Y_{k+1}^{u-1}, & \psi_4 &= a_4 G(r) Y_k^{u-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Reportant ces fonctions dans l'équation (106) et utilisant les relations de récurrence entre polynomes $P_l^m(\theta)$, on est conduit à un premier système de solution qui s'écrit, à un facteur de normalisation près;

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{aligned}
\psi_1 &= -iFY_{k+1}^u, & \psi_3 &= (k-u+1)GY_k^u,\\
\psi_2 &= FY_{k+1}^{u-1}, & \psi_4 &= (k+u)GY_k^{u-1},
\end{aligned}\right.$$

([16]) Franz, *Sitzungberichte München Akad.*, 1935, p. 380-435.

([17]) Sauter, *Zeitsch. f. Physik*, 1930, **63**, p. 803; 1930, **64**, p. 295.

$F(r)$ et $G(r)$ étant solutions du système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c}+U_0(r)+m_0c+I_1(r)\right]F \\ &\qquad -\left[\frac{\partial}{\partial r}-\frac{k}{r}-\frac{P(r)}{\hbar}\right]G=0, \\ &\frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c}+U_0(r)-\big(m_0c+I_1(r)\big)\right]G \\ &\qquad +\left[\frac{\partial}{\partial r}+\frac{k+2}{r}+\frac{P(r)}{\hbar}\right]F=0. \end{aligned}\right\} \quad (110)$$

De même on obtient facilement un second système de solutions

$$\text{II.}\left\{\begin{aligned} \psi_1 &= i(k-u)FY^u_{k-1}, & \psi_3 &= GY^u_k, \\ \psi_2 &= -i(k+u-1)FY^{u-1}_{k-1}, & \psi_4 &= -GY^{u-1}_k, \end{aligned}\right.$$

$F(r)$ et $G(r)$ étant cette fois solutions du système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c}+U_0(r)+m_0c+I_1(r)\right]F \\ &\qquad -\left[\frac{\partial}{\partial r}+\frac{k+1}{r}-\frac{P}{\hbar}\right]G=0, \\ &\frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c}+U_0(r)-\big(m_0c+I_1(r)\big)\right]G \\ &\qquad +\left[\frac{\partial}{\partial r}-\frac{k-1}{r}+\frac{P}{\hbar}\right]F=0. \end{aligned}\right\} \quad (111)$$

Posons

$$F=\frac{1}{r}f, \qquad G=\frac{1}{r}g,$$

les systèmes (110) et (111) s'écrivent encore en introduisant la fonction $\varphi_i(r)$, telle que

$$\varphi_1=f, \qquad \varphi_2=g;$$

$$\left\{\frac{1}{\hbar}[(W+U_0)+(m_0c+I_1)\rho_3] + i\rho_2\frac{\partial}{\partial r}-\left(-\frac{k+1}{r}-\frac{P}{\hbar}\right)\rho_1\right\}\varphi_{\mathrm{I}}=0, \quad (112)$$

$$\left\{\frac{1}{\hbar}[(W+U_0)+(m_0c+I_1)\rho_3] + i\rho_2\frac{\partial}{\partial r}-\left(\frac{k}{r}-\frac{P}{\hbar}\right)\rho_1\right\}\varphi_{\mathrm{II}}=0. \quad (113)$$

Nous retrouvons donc par la méthode de Darwin le système (69) sous la forme (72), avec pour φ_{II}, $k=j$, pour φ_{I}, $k+1=-j$.

Nous allons examiner la forme explicite des solutions de ce système dans le cas

$$U_0=\text{const.}, \qquad I_1=\text{const.}, \qquad P=\frac{c_1\hbar}{r}. \quad (114)$$

Nous obtenons alors immédiatement par itération

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{\hbar^2}\left[\left(\frac{W}{c}+U_0\right)^2-(m_0c+I_1)^2\right] - \frac{(j-c_1)^2-(j-c_1)\rho_3}{r^2}\right\}\varphi=0 \quad (115)$$

ou encore, posant

$$K^2=\frac{1}{\hbar^2}\left[\left(\frac{W}{c}+U_0\right)^2-(m_0c+I_1)^2\right], \quad (116)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+K^2-\frac{\left(j-c_1-\frac{\rho_3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right]\varphi=0. \quad (117)$$

Ce qui nous donne la solution générale

$$\varphi_{\mathrm{I}}=A_{(\mathrm{I})}r^{\frac{1}{2}}Z_{j+c_1+1+\frac{\rho_3}{2}}(Kr), \quad (118)$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}=A_{(\mathrm{II})}r^{\frac{1}{2}}Z_{j-c_1-\frac{\rho_3}{2}}(Kr), \quad (119)$$

où Z_n est la fonction de Bessel générale d'ordre n. Toutefois les fonctions φ_{I} et φ_{II} introduisent chacune deux constantes A qui ne sont pas indépendantes et pour les déterminer nous devons tenir compte des équations du premier ordre (112) et (113).

A partir de (118) nous écrivons

$$\left.\begin{aligned} f_{\mathrm{I}} &= A\lambda_{\mathrm{I}}r^{\frac{1}{2}}Z_{k+c_1+\frac{3}{2}}(Kr), \\ g_{\mathrm{I}} &= Ar^{\frac{1}{2}}Z_{k+c_1+\frac{1}{2}}(Kr), \end{aligned}\right\} \quad (120)$$

A étant une constante de normalisation.

Posant alors

$$K_1=\frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c}+U_0+m_0c+I_1\right],$$

$$K_2=\frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c}+U_0-(m_0c+I_1)\right],$$

d'où

$$K_1K_2=K^2$$

et utilisant les formules de récurrence

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}Z_n(Kr)=KZ_{n-1}-\frac{n}{r}Z_n,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}Z_n(Kr)=-KZ_{n+1}+\frac{n}{r}Z_n,$$

on voit facilement que l'on a

$$\lambda_{\mathrm{I}}=-K_2.$$

De même développant φ_{II} suivant

$$f_{\mathrm{II}}=A\lambda_{\mathrm{II}}r^{\frac{1}{2}}Z_{k-c_1-\frac{1}{2}}, \qquad g_{\mathrm{II}}=Ar^{\frac{1}{2}}Z_{k-c_1+\frac{1}{2}}, \quad (121)$$

on trouve facilement

$$\lambda_{\mathrm{II}}=K_2.$$

On en déduit la solution générale

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1 &= A_1 \frac{iK_2}{\sqrt{r}} Z_{k+c_1+\frac{3}{2}}(Kr)\, Y^u_{k+1} \\
&\quad + B_1 \frac{iK_2}{\sqrt{r}}(k-u) Z_{k-c_1-\frac{1}{2}}(Kr)\, Y^u_{k-1}, \\
\psi_2 &= -A_1 \frac{iK_2}{\sqrt{r}} Z_{k+c_1+\frac{3}{2}}(Kr)\, Y^{u-1}_{k+1} \\
&\quad - B_1 \frac{iK_2}{\sqrt{r}}(k-u+1) Z_{k-c_1-\frac{1}{2}}(Kr)\, Y^{u-1}_{k-1}, \\
\psi_3 &= A_2 \frac{k-u+1}{\sqrt{r}} Z_{k+c_1+\frac{1}{2}}(Kr)\, Y^u_k \\
&\quad + B_2 \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{k-c_1+\frac{1}{2}}(Kr)\, Y^u_k, \\
\psi_4 &= A_2 \frac{(k+u)}{\sqrt{r}} Z_{k+c_1+\frac{1}{2}}(Kr)\, Y^{u-1}_k \\
&\quad - B_2 \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{k-c_1+\frac{1}{2}}(Kr)\, Y^{u-1}_k.
\end{aligned}\right\} \quad (122)$$

On obtient ainsi une solution générale qui dépend de quatre constantes arbitraires.

VI. — Nous allons maintenant revenir à notre équation générale (4) et examiner si, en dehors des cas dans lesquels existe l'intégrale première de Dirac, il ne nous est pas possible d'obtenir des solutions se présentant comme des produits de fonctions radiales et de fonctions sphériques.

Le cas le plus simple dans lequel nous nous placerons ici est celui des interactions d'intensité constantes. Nous allons montrer que dans ce cas il existe pour certains types d'interaction une intégrale première qui nous permet la séparation cherchée.

En effet, dans le cas d'absence de champ extérieur, l'équation de Dirac

$$[p_0 + (\mathbf{p}\alpha) + m_0 c \alpha_4]\psi = 0, \quad (123)$$

admet notamment l'intégrale première [18]

$$v = (\mathbf{p}.\sigma). \quad (124)$$

Dans le cas où nous complétons l'équation (122) par le terme H_1, avec des termes d'interaction constants, on voit facilement que v est encore intégrale première si nous avons

$$H_1 = I_1\alpha_4 + U_0 + S_0\rho_1 + I_2\rho_2, \quad (125)$$

avec

$$I_1, \quad U_0, \quad S_0, \quad I_2 = \text{const.}$$

Dans ce cas nous avons également encore l'intégrale première du moment orbital

$$\mathbf{N} = \mathbf{L} + \frac{h}{2}\sigma. \quad (126)$$

Soit $\lambda\hbar$ une valeur propre de v et ψ la solution correspondante, telle que

$$(\mathbf{p}.\sigma)\psi = \lambda\hbar\psi. \quad (127)$$

L'équation du second ordre que nous dérivons de (123), complété par (125), nous donne, tenant compte de (127),

$$\lambda\hbar = -S_0 \pm \sqrt{\left(\frac{W}{c} + U_0\right)^2 - (m_0 c + I_1)^2 - I_2^2}. \quad (128)$$

D'autre part, l'équation d'ondes se décompose en deux groupes de deux fonctions $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, tels que

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{W}{c} + U_0 + m_0 c + I_1\right]\varphi^{(1)} \\
&\quad + [(\mathbf{p}.\sigma) + S_0 + iI_2]\varphi^{(2)} = 0, \\
&\left[\frac{W}{c} + U_0 - (m_0 c + I_1)\right]\varphi^{(2)} \\
&\quad + [(\mathbf{p}.\sigma) + S_0 - iI_1]\varphi^{(1)} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (129)$$

Tenant compte de (127), nous voyons alors que les deux fonctions $\varphi^{(1)}$ seront déterminées à partir des $\varphi^{(2)}$ par

$$\varphi^{(1)} = -\frac{\lambda\hbar + S_0 + iI_2}{\frac{W}{c} + U_0 + m_0 c + I_1}\varphi^{(2)}. \quad (130)$$

Il nous suffira donc de déterminer les solutions de (127) avec les valeurs (128) de $\lambda\hbar$.

Or, les solutions de (127) satisfont à l'équation

$$(\mathbf{p}.\sigma)^2\psi = \mathbf{p}^2\psi = \lambda^2\hbar^2\psi. \quad (131)$$

Soit $\chi(r, \theta, \varphi)$ une solution de cette équation qui s'écrit encore

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot g\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right]\chi = -\lambda^2\chi. \quad (132)$$

Posant

$$\chi = \chi(r)\, e^{+im\varphi} P^m_l(\theta) = \chi(r)\, Y^m_l(\theta),$$

on voit immédiatement que $\chi(r)$ sera solution de

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \lambda^2\right]\chi(r), \quad (133)$$

d'où

$$\chi(r) = A r^{-\frac{1}{2}} Z_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r), \quad (134)$$

A étant une constante et $Z_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ une fonction de Bessel d'ordre demi entier $l + \frac{1}{2}$.

Les fonctions $\varphi^{(2)}$ se détermineront à partir d'une solution $\chi^{l,m;\lambda}$ par

$$\varphi^{(2);l,m;\lambda} = [(\mathbf{p}.\sigma) + \lambda\hbar]\chi^{l,m;\lambda}, \quad (135)$$

$$\left[\mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\sigma\right]\chi^{l,m;\lambda} = -\left[m + \frac{1}{2}\right]\hbar\chi^{l,m;\lambda}, \quad (136)$$

([18]) Proca, *Thèse*, Paris 1932; G. Petiau, *C. R. Ac. Sci.*, Paris, 1946, **223**, p. 269-70.

(136) nous donne immédiatement

$$\left.\begin{aligned}\chi_1^{l,m;\lambda} &= \chi_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\, Y_l^{m+1},\\ \chi_2^{l,m;\lambda} &= \chi_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\, Y_l^{m}.\end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Tenant compte des relations de récurrence entre fonctions $\chi(r)$,

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\chi_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r) &= \lambda\,\chi_{l+\frac{3}{2}}(\lambda r),\\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right)\chi_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r) &= \lambda\,\chi_{l-\frac{1}{2}}(\lambda r),\end{aligned}\right\} \tag{138}$$

on a les relations

$$\left.\begin{aligned}(\partial_x + i\,\partial_y)\chi_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\, Y_l^m &= -\frac{\lambda}{2l+1}\left[\chi_{l+\frac{3}{2}} Y_{l+1}^{m+1} + (l-m)(l-m-1)\chi_{l-\frac{1}{2}} Y_{l-1}^{m+1}\right],\\ (\partial_x - i\,\partial_y)\chi_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\, Y_l^m &= \frac{\lambda}{2l+1}\left[\chi_{l+\frac{3}{2}} Y_{l+1}^{m-1} + (l+m)(l+m-1)\chi_{l-\frac{1}{2}} Y_{l-1}^{m-1}\right],\\ \partial_z\chi_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\, Y_l^m &= -\frac{\lambda}{2l+1}\left[\chi_{l+\frac{3}{2}} Y_{l+1}^{m} - (l+m)(l-m)\chi_{l-\frac{1}{2}}^{m}(\lambda r)\right].\end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Nous en déduisons la solution

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(2);l,m;\lambda} = {}& +\frac{|\lambda|\hbar i A_2}{2l+1}\left[\chi_{l+\frac{3}{2}}(\lambda r)\, Y_{l+1}^{m+1} + (l-m)(l-m-1)\chi_{l-\frac{1}{2}} Y_{l-1}^{m+1}\right]\\ & - \frac{|\lambda|\hbar i A_1}{2l+1}\left[\chi_{l+\frac{3}{2}}(\lambda r)\, Y_{l+1}^{m+1} - (l+m+1)(l-m-1)\chi_{l-\frac{1}{2}}^{m+1}(\lambda r)\right] + \lambda\hbar A_1\left[\chi_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\, Y_l^{m+1}\right],\\ \varphi_2^{(2);l,m;\lambda} = {}& \frac{|\lambda|\hbar i A_1}{2l+1}\left[\chi_{l+\frac{3}{2}}(\lambda r)\, Y_{l+1}^{m} + (l+m+1)(l+m)\chi_{l-\frac{1}{2}}(\lambda r)\, Y_{l-1}^{m}\right]\\ & + \frac{|\lambda|\hbar i A_2}{2l+1}\left[\chi_{l+\frac{3}{2}}(\lambda r)\, Y_{l+1}^{m} - (l+m)(l-m)\, Y_{l-1}^{m}\chi_{l-\frac{1}{2}}(\lambda r)\right] + \lambda\hbar A_2\left[\chi_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\, Y_l^{m}\right].\end{aligned}$$

Aux deux valeurs de λ correspondent deux solutions de ce type pour les fonctions $\varphi^{(2)}$, les $\varphi^{(1)}$ s'en déduisant par la relation (130) et l'on voit encore que la solution générale dépend de quatre constantes arbitraires.

Je remercie M. le Professeur Louis de Broglie pour la bienveillante attention qu'il a portée à ce travail.

Manuscrit reçu le 6 avril 1949.

ÉTUDE THÉORIQUE DES IMPULSIONS DE TENSION ISSUES DES CHAMBRES D'IONISATION

Par P. BILLAUD.
Laboratoire de Physique des rayons X.

Sommaire. — Au moyen de fonctions représentant le mouvement des ions dans le champ il est possible d'étudier théoriquement les impulsions fournies par des chambres de géométrie quelconque. Certaines lois sont établies, qui permettent de tirer de l'examen d'une impulsion des renseignements sur la particule ionisante, notamment son énergie et sa direction par rapport au champ.

I. — Calcul de l'impulsion.

A. Mouvement des ions. — On sait qu'une particule chargée en mouvement crée dans un gaz des paires d'ions; ces ions se meuvent dans le gaz sous l'influence d'un champ électrique en cédant constamment l'énergie que leur communique ce champ aux molécules du gaz, par chocs. Nous retiendrons surtout le fait que cet échange d'énergie est, en moyenne, irréversible, et que le travail accompli par les ions au sein du mélange gazeux constitue toujours une perte définitive pour l'énergie potentielle totale du circuit électrique relié aux électrodes entre lesquelles était établi le champ.

B. Équation du circuit théorique. — La chambre d'ionisation ayant une forme quelconque, nous supposerons que son électrode dite « collectrice » est reliée directement à la grille de commande d'un tube à vide de type quelconque et que cette grille n'échange aucune charge électrique avec les autres électrodes du tube. Le conducteur composé de l'électrode collectrice et de la grille est relié à la masse (sol) par une résistance pure R. On applique à la chambre une tension V_0 positive ou négative; ses deux électrodes présentent une capacité mutuelle C_0. Pour calculer la différence de potentiel u à laquelle se situe l'électrode collectrice par rapport au sol, lorsqu'une ionisation transitoire est créée dans la chambre, il est nécessaire de tenir un compte exact de toutes les influences électrostatiques auxquelles elle est soumise.

On a schématisé sur la figure 1 :

La protection électrostatique de l'électrode collectrice (blindage à la masse) et la cathode de la lampe d'entrée, par la capacité C_b.

La grille écran de la lampe d'entrée (s'il s'agit d'une tétrode ou penthode) : capacité C_e; potentiel fixe V_e.

La plaque de la lampe : capacité C_p, potentiel variable $V_p = \alpha - \beta u$.

Un conducteur quelconque susceptible de présenter une capacité mutuelle appréciable C_x, au potentiel fixe V_x.

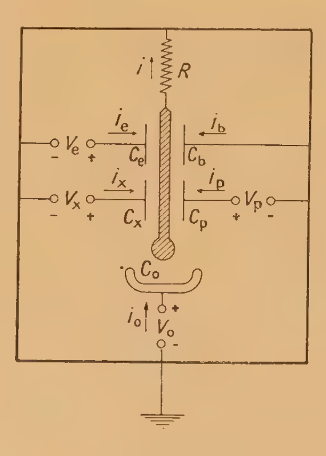


Fig. 1.

Il circule dans les diverses dérivations des courants i, i_0, i_x, etc., orientés comme sur la figure (¹). Les capacités sont chargées à des tensions instantanées

$$v_0 = V_0 - u, \quad v_x = V_x - u, \quad v_e = V_e - u,$$
$$v_b = -u, \quad v_p = \alpha - (\beta + 1)u.$$

On a, d'autre part,

$$i = \frac{u}{R} = i_0 + i_x + i_e + i_b + i_p.$$

Soient $w(t)$ le travail effectué par le champ de la chambre sur les ions à l'instant t et $p(t) = \frac{dw}{dt}$ la puissance correspondante; on peut écrire que la puissance développée par l'ensemble des forces électromotrices est égale à $p(t)$ augmentée de l'accrois-

(¹) Le courant i_p est un courant partiel qui se superpose au courant de plaque proprement dit, de même i_e.

sement des énergies emmagasinées dans les capacités et de l'effet Joule dans la résistance R

$$V_0 i_0 + V_x i_x + V_e i_e + (\alpha - \beta u) i_P = p(t) - C_0(V_0 - u)u' - C_x(V_x - u)u' - C_e(V_e - u)u' + C_b u u' - (\beta + 1) C_P[\alpha - (\beta + 1)u]u' + \frac{u^2}{R} \quad \text{avec} \quad u' = \frac{du}{dt}.$$

Sauf i_0 et i, les courants sont les dérivées des charges des capacités et l'on a

$$i_x = -C_x u', \qquad i_e = -C_e u', \qquad i_b = -C_b u', \qquad i_P = -(\beta + 1) C_P u';$$

d'où

$$i_0 = \frac{u}{R} + [C_x + C_e + C_b + (\beta + 1) C_P] u'.$$

En portant ces valeurs dans l'équation précédente, et après réduction, il vient

$$(V_0 - u)\frac{u}{R} + (V_0 - u) \times [C_0 + C_x + C_e + C_b + (\beta + 1) C_P] u' = p(t),$$

que l'on écrit, en posant

$$C = C_0 + C_x + C_e + C_b + (\beta + 1) C_P;$$

$$\left(\frac{u}{RC} + u'\right)\left(1 - \frac{u}{V_0}\right) = \frac{p(t)}{CV_0}. \qquad (1)$$

Dans de nombreux cas expérimentaux u est négligeable devant la tension V_0 de la chambre, et la relation ci-dessus se réduit alors à

$$\frac{u}{RC} + u' = \frac{p(t)}{CV_0}. \qquad (1\,bis)$$

Nous nous limiterons à l'étude de cette équation approchée.

Remarque. — Lorsque la résistance R est très faible, l'approximation ci-dessus envisagée est valable *a fortiori* et l'on pourrait étudier le courant i, ou mieux le courant i_0, donnés en vertu de ce qui précède, par

$$i + RC i' = \frac{p(t)}{V_0}, \qquad i_0 = \frac{p(t)}{V_0}.$$

II. — Discussion de l'équation.

A. **Composantes de l'impulsion.** — Soient $t = 0$ l'instant de l'arrivée de la particule ionisante dans la chambre (sa durée de parcours est supposée négligeable), $t = \tau$ un instant quelconque où l'impulsion est étudiée, $t = \tau_1$ et $t = \tau_2$ les instants respectifs où disparaissent les derniers ions négatifs et les derniers ions positifs, par neutralisation sur les électrodes.

Si $p_1(\tau)$ et $p_2(\tau)$ sont les parties de la puissance $p(\tau)$ relatives respectivement à chaque catégorie d'ions, l'amplitude $u(\tau)$ de l'impulsion est telle que

$$u(\tau) = u_1(\tau) + u_2(\tau),$$

u_1 et u_2 étant les solutions de l'équation différentielle lorsque l'on y remplace $p(t)$ successivement par p_1 et p_2.

Les résultats généraux obtenus en étudiant u_1 seront valables pour u_2, et l'étude de l'impulsion totale s'en déduira immédiatement.

B. **Étude de la fonction $u_1(\tau)$.** — 1° *Solution.* — Avec la convention $u_1 = 0$ à l'instant $t = 0$ (équilibre électrique), l'équation (1 *bis*) admet la solution

$$u_1(\tau) = \frac{1}{CV_0}\int_0^\tau e^{-\frac{\tau - t}{RC}} p_1(t)\,dt. \qquad (2)$$

Cette fonction présente après τ_1, instant de disparition de la dernière charge de la catégorie, une décroissance exponentielle du résidu de tension $u_1(\tau_1)$, suivant

$$u_1(\tau) = u_1(\tau_1)\,e^{-\frac{\tau - \tau_1}{RC}} \qquad (\tau > \tau_1). \qquad (2\,bis)$$

2° *Cas où RC est grand ou très grand par rapport à τ_1.* — En posant

$$U_1(\tau) = \frac{1}{CV_0}\int_0^\tau p_1(t)\,dt = \frac{w_1(\tau)}{CV_0}$$

et en remarquant que $e^{-\frac{\tau - t}{RC}}$ est constamment compris entre 1 et $e^{-\frac{\tau}{RC}}$, l'on peut écrire

$$e^{-\frac{\tau}{RC}} U_1(\tau) < u_1(\tau) < U_1(\tau),$$

d'où l'on tire, lorsque $RC \gg \tau_1$:

$$u_1(\tau) = \frac{w_1(\tau)}{CV_0}(1 - \varepsilon), \qquad (3)$$

avec

$$0 < \varepsilon < \frac{\tau}{RC} - \frac{\tau^2}{2R^2C^2} + \ldots < \frac{\tau}{RC}.$$

L'on en conclut que, lorsque la constante de temps du circuit est grande devant la vie τ_1 des ions, l'amplitude de l'impulsion est, à moins de $\frac{\tau}{RC}$ près, proportionnelle au travail de ces ions; la deuxième partie de la fonction $(\tau > \tau_1)$ reste alors voisine de la constante $\frac{w_1(\tau_1)}{CV_0} = U_1(\tau_1)$, sauf lorsque l'ordre de grandeur de τ approche celui de RC.

Lorsque τ_1 n'est pas très petit devant RC, on peut obtenir le travail $w_1(\tau)$ en intégrant l'équation; il vient

$$\frac{w_1(\tau)}{CV_0} = u_1(\tau) + \frac{\tau}{RC}\bar{u}_1(\tau), \qquad (4)$$

$\bar{u}_1(\tau)$ étant l'amplitude moyenne entre $t = 0$ et $t = \tau$.

Dans ce domaine de constantes de temps, nous dirons que l'impulsion est du type « travail ».

3° *Cas où RC est petit devant* τ_1. — L'impulsion est alors voisine de la fonction $\frac{R}{V_0} p_1(\tau)$, comme on s'en rend compte immédiatement sur la figure 2, qui

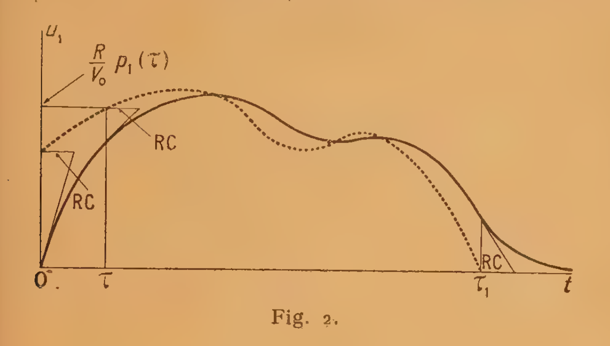


Fig. 2.

interprète graphiquement la relation (1 *bis*). L'impulsion apparaît comme *en retard de RC* sur la fonction $\frac{R}{V_0} p_1$; notons aussi que les maxima et minima de l'impulsion sont des points de la courbe $\frac{R}{V_0} p_1$.

La deuxième partie, après τ_1, décroît d'autant plus vite que RC est plus petit.

On serait tenté de réduire la constante de temps jusqu'à ce que l'écart entre les deux fonctions devienne négligeable; mais l'amplitude, en moyenne, se trouverait alors réduite dans la même mesure que RC; en effet l'équation (4) ci-dessus, multipliée par $\frac{RC}{\tau}$ donne

$$\bar{u}_1(\tau) + \frac{RC}{\tau} u_1(\tau) = \frac{RC}{\tau} U_1(\tau), \qquad (4\,bis)$$

sauf si l'amplitude instantanée est beaucoup plus grande que l'amplitude moyenne, le deuxième terme du premier membre est petit devant $\bar{u}_1(\tau)$, de sorte que l'amplitude moyenne pour RC petit devant τ est de l'ordre de $\frac{RC}{\tau} U_1(\tau)$, c'est-à-dire petite devant l'amplitude maximum

$$U_1(\tau) = \frac{w_1(\tau)}{CV_0}.$$

Comme il est impossible, en raison du bruit de fond, de réduire arbitrairement l'amplitude du phénomène initial, l'emploi de courtes constantes de temps ne donnera pas d'image parfaitement fidèle de la fonction descriptive du mouvement des ions.

De même que l'impulsion elle-même décrit plus ou moins la puissance, l'aire qu'elle délimite avec l'axe des temps est liée au travail des ions; en intégrant l'équation (1 *bis*) il vient en effet

$$\int_0^\tau u_1(t)\,\mathrm{d}t + RC\,u_1(\tau) = \frac{R}{V_0} w_1(\tau), \qquad (4\,ter)$$

relation qui montre que le travail des ions est proportionnel à l'aire de l'impulsion de zéro à τ, augmentée d'un rectangle de base RC; en particulier si l'on fait $\tau = \infty$, $u_1(\tau) = 0$, $w_1(\tau) = w_1(\tau_1)$ et les aires totales délimitées au-dessus de l'axe des temps par les fonctions u_1 et $\frac{R}{V_0} p_1$ s'équivalent; si A_1 est l'aire délimitée par l'impulsion, nous aurons

$$w_1(\tau_1) = \frac{V_0}{R} A_1. \qquad (5)$$

Dans tous les cas où RC est assez petit pour que l'impulsion se rapproche de la fonction p_1 nous dirons que cette impulsion est du type « puissance ».

4° *Cas où RC est du même ordre que* τ_1. — L'impulsion est alors d'un type « mixte », et bénéficie des résultats généraux obtenus dans les deux premiers cas. Ainsi en utilisant, soit la relation (4), soit les équations (1 *bis*) ou (4 *ter*), selon que RC sera supérieur ou inférieur à τ_1, l'on pourra restituer commodément les fonctions $p_1(\tau)$ ou $w_1(\tau)$ qui décrivent le mouvement des ions.

Le début de la décroissance exponentielle finale sera observable et pourra fournir une mesure approchée ou confirmative de RC.

Quant à l'amplitude de l'impulsion, elle restera de l'ordre de grandeur de

$$\frac{RC}{\tau} U_1(\tau) = \frac{RC}{\tau} \frac{w_1(\tau)}{CV_0} \qquad \text{pour} \quad \tau > RC;$$

mais elle sera assez sensible à l'allure de p_1. En particulier si la fonction p_1 est croissante, $u_1(\tau_1)$ sera plus élevé que si p_1 était décroissante. Pour fixer les idées supposons $RC = \tau_1$; la première inégalité obtenue au paragraphe 2° ci-dessus montre que

$$U_1(\tau_1) > u_1(\tau_1) > \frac{1}{e} U_1(\tau_1) > \frac{U_1(\tau_1)}{3};$$

si, par exemple p_1 était constante, $u_1(\tau_1)$ serait égal à

$$\frac{e-1}{e} U_1(\tau_1) \simeq 0{,}6\, U_1(\tau_1).$$

Enfin, et cela est valable quelle que soit la constante de temps, la pente initiale $u'_1(0)$ est égale à $\frac{p_1(0)}{CV_0}$.

5° *Influence des paramètres R, C et* V_0. — Lorsque l'on prend les dérivées partielles par rapport à R et C de la solution (2), l'on obtient

$$\frac{\partial u_1(\tau)}{\partial R} = \frac{e^{-\frac{\tau}{RC}}}{R^2 C^2 V_0} \int_0^\tau (\tau - t)\, e^{\frac{t}{RC}} p_1(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\partial u_1(\tau)}{\partial C} = -\frac{e^{-\frac{\tau}{RC}}}{C} \int_0^\tau u'_1(t)\, e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{d}t.$$

La première est évidemment toujours positive.

Quant à la seconde elle est toujours négative car

$$e^{-\frac{\tau}{RC}} < e^{-\frac{\tau - t}{RC}} < 1$$

et

$$0 < u_1(\tau)\, e^{-\frac{\tau}{RC}} < e^{-\frac{\tau}{RC}} \int_0^{\tau} u'_1(t)\, e^{\frac{t}{RC}}\, dt.$$

On a donc toujours avantage à diminuer le plus possible la capacité totale; en particulier lorsque RC est grand, l'amplitude résultante finale s'identifie au quotient bien connu $\frac{q}{C}$ (où q représente la charge totale des ions) et varie par conséquent en raison inverse de la capacité. D'une manière générale on s'attache à réduire C le plus possible, et c'est en définitive R qui seule commande la constante de temps.

Quant à V_0 il n'est cité que pour mémoire car sa variation est sans action sur l'amplitude de tension; en effet si V_0 apparaît bien en dénominateur dans la solution $u_1(\tau)$, il ne faut pas oublier qu'il est implicitement contenu en facteur dans les fonctions w_1 et p_1. Par contre V_0 influe sur les durées τ ou τ_1, toutes choses égales d'ailleurs, et, par conséquent, sur le rapport de ces durées avec RC.

C. **Impulsion résultante.** — L'impulsion partielle u_2 relative à la deuxième catégorie d'ions obéit exactement aux mêmes lois que u_1, en faisant intervenir les fonctions $p_2(\tau)$ et $w_2(\tau)$, ainsi que le paramètre τ_2, instant de disparition du dernier ion de la catégorie.

L'impulsion résultante u, somme de u_1 et u_2, obéit également aux lois déjà énoncées pour u_1; il suffit de remplacer partout u_1 par u et p_1 par p.

On peut distinguer dans le développement de l'impulsion totale trois phases principales; si $\tau_1 < \tau_2$, on rencontrera :

Une phase initiale où $0 < \tau < \tau_1$

$$u(\tau) = \frac{e^{-\frac{\tau}{RC}}}{CV_0} \int_0^{\tau} e^{\frac{t}{RC}} [p_1(t) + p_2(t)]\, dt;$$

Une phase intermédiaire de τ_1 à τ_2 :

$$u(\tau) = u_1(\tau_1)\, e^{-\frac{\tau - \tau_1}{RC}} + \frac{e^{-\frac{\tau}{RC}}}{CV_0} \int_0^{\tau} e^{\frac{t}{RC}} p_2(t)\, dt;$$

Une phase finale de τ_2 à l'infini

$$u(\tau) = u(\tau_2)\, e^{-\frac{\tau - \tau_2}{RC}}.$$

Par des moyens appropriés (collection d'électrons) l'on peut obtenir pour les ions négatifs des vitesses de déplacement 10^3 fois supérieures à celles des ions positifs, ce qui permet de séparer très aisément dans le temps les influences respectives des ions de chaque signe sur l'impulsion.

D. **Impulsion complémentaire.** — En supposant les paires d'ions distribuées exactement de la même manière à l'instant $t = 0$, et si l'on inverse la tension V_0, on obtient une impulsion négative égale à

$$u_i(\tau) = -\frac{e^{-\frac{\tau}{RC}}}{CV_0} \int_0^{\tau} e^{\frac{t}{RC}} p_i(t)\, dt,$$

avec

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} = \frac{dw_{i1}}{dt} + \frac{dw_{i2}}{dt};$$

les durées τ_{i1} et τ_{i2} de vie des ions seront alors différentes de τ_1 et τ_2, comme pour la puissance et le travail.

Cette impulsion négative est cependant liée à l'autre par les relations

$$w_{i1}(\tau_{i1}) = w_2(\tau_2),$$
$$w_1(\tau_1) = w_{i2}(\tau_{i2}),$$

qui résultent du fait que les parcours et chutes de potentiel des ions sont échangés entre les deux catégories quand on inverse la tension, en négligeant naturellement l'écartement initial des deux ions de chaque paire, effet qui d'ailleurs se compense statistiquement.

III. — Amplification de l'impulsion.

Par un raisonnement tout à fait analogue à celui qui nous a permis d'établir l'équation différentielle (1), on peut étudier sans difficulté la transformation subie par l'impulsion lorsqu'elle traverse une liaison résistance-capacité de l'amplificateur. Si u_i est la tension transitoire reçue par la grille de la lampe n° i, $-k_i u_i$ la variation correspondante sur la plaque de la lampe, l'impulsion u_{i+1} que reçoit la grille de la lampe suivante est donnée par

$$\frac{u_{i+1}}{R_{i+1} C_{i+1}} + u'_{i+1} = -k_i u'_i,$$

$R_{i+1} C_{i+1} = \theta_{i+1}$ étant la constante de temps du couplage et k_i le coefficient dynamique d'amplification de la lampe n° i au point de fonctionnement considéré.

D'après la discussion déjà faite pour l'équation (1 *bis*) il apparaît que si θ_{i+1} est très grande devant la durée du phénomène transitoire, l'on aura une amplification pure et sans distorsion

$$u_{i+1} = -k_i u_i.$$

Si, au contraire, θ_{i+1} est du même ordre que la durée de l'impulsion u_i ou d'un ordre très petit, u_{i+1} suivra plus ou moins la dérivée u'_i, avec un affaiblissement d'amplitude du même ordre que celui du rapport de θ_{i+1}, à la durée de l'impulsion; en outre une distorsion de phase comportant un retard égal à θ_{i+1} interviendra.

C'est pourquoi généralement l'on recherche la fidélité en maintenant les constantes de temps de tous les étages, y compris celle de la chambre d'ionisation, assez grandes par rapport à la durée de l'impulsion, sauf une dans certains cas.

Supposons que l'on ait opéré ainsi et que θ soit cette courte constante de temps. Dans ces conditions la tension transitoire de sortie de l'amplificateur est en valeur absolue

$$u_n(\tau) = K \frac{e^{-\frac{\tau}{\theta}}}{CV_0} \int_0^\tau p(t)\, e^{\frac{t}{\theta}}\, dt,$$

K étant le coefficient total d'amplification, compte tenu du feed-back s'il y a lieu.

$u_n(\tau)$ est en somme la solution de l'équation

$$\frac{u_n(\tau)}{\theta} + u'_n = K \frac{p(t)}{CV_0}, \qquad (1\,ter)$$

qui se discute exactement comme (1 *bis*), u_n remplaçant u et θ remplaçant RC.

Remarque. — Dans une liaison résistance-capacité entre deux étages d'un amplificateur, la résistance et la capacité interviennent inséparablement par leur produit, donnant ainsi un degré de liberté dans la fixation de la constante de temps. C'est une différence importante avec le circuit initial (chambre d'ionisation) où la capacité C influe directement sur l'amplitude.

IV. — Exploitation de la théorie.

Cas des géométries à champ droit. — A. Remarque préliminaire. — Les lois énoncées dans ce qui précède sont valables pour une géométrie quelconque, quelle que soit l'histoire des ions. Ce résultat n'a pu être atteint précisément qu'en incluant implicitement ces importantes conditions dans les fonctions p et w. Si l'on veut continuer l'étude des impulsions en explicitant certains caractères de ces dernières fonctions, il devient indispensable de faire intervenir la géométrie de l'appareil, d'une part, et, d'autre part, l'ensemble des lois régissant le comportement des ions dans les gaz (mobilité, recombinaison, attachement, diffusion, ionisation par chocs, etc.). Cette dernière partie nécessiterait à elle seule une étude particulière que nous ne pouvons entreprendre ici. Nous supposerons que l'on a réalisé des conditions expérimentales telles que le nombre des ions libérés par une particule ionisante ne soit pas affecté de manière appréciable par l'attachement et la recombinaison et qu'il n'y ait pas d'ionisation par choc.

Nous allons montrer ci-après quels renseignements sur la particule ionisante il est possible de tirer de l'étude d'une impulsion.

B. Détermination du nombre de paires. — On sait que le nombre de paires est lié étroitement à la perte d'énergie de la particule pendant son passage dans le volume gazeux soumis au champ électrique de la chambre, d'où la possibilité d'utiliser un tel appareil comme spectromètre.

1° *Loi générale.* — Le travail total des ions créés par une particule dans une chambre est proportionnel au nombre de paires. Les méthodes de restitution de la fonction $w(\tau)$ envisagées précédemment permettent donc de déterminer dans tous les cas le nombre de paires à un facteur près, si l'on possède un enregistrement convenable de l'impulsion issue de la chambre.

2° *Artifices permis par la collection des électrons.* — Lorsque l'on utilise la méthode de collection des électrons et que l'on élimine par un choix judicieux de la constante θ l'influence des ions positifs, il est encore possible de déterminer dans certains cas le nombre de paires.

Ainsi Sherr et Peterson [2] rappellent ou suggèrent quelques artifices applicables le plus souvent à la seule géométrie plane (électrodes planes parallèles).

Emploi d'une grille [3] (applicable à d'autres géométries);

Emploi d'une électrode fine (inapplicable à la géométrie plane);

Méthode de la différentiation de l'impulsion;

Attachement retardé des électrons.

Il faudrait y ajouter l'utilisation d'un champ électrique alternatif. Ces auteurs ont employé avec succès la troisième méthode qui consiste, en accord avec nos propres conclusions, à obtenir une impulsion du type puissance, dont le palier initial mesure par son ordonnée le nombre de paires; ils tentent également d'étudier l'orientation des trajectoires par rapport au champ et l'ionisation spécifique des particules. Soulignons que cette méthode est limitée strictement au cas de la géométrie plane, d'ailleurs la plus simple et la meilleure dans la plupart des cas.

C. Orientation de la trajectoire par rapport au champ lorsque les lignes de force sont droites. — 1° *Méthode des discontinuités.* — Nous allons envisager le cas où les électrodes sont, soit des plans parallèles, soit des cylindres concentriques, soit des sphères concentriques. Les lignes de forces sont alors des droites, et les surfaces équipotentielles des plans, cylindres ou sphères parallèles aux électrodes (en mettant de côté bien entendu les régions extrêmes où les bords des électrodes introduisent une distorsion).

(2) *Voir* références bibliographiques.
(3) Alfen, *voir* références bibliographiques.

Dans ce cas, toutes choses égales d'ailleurs, les ions de chaque catégorie prennent un mouvement moyen bien déterminé qui peut toujours se traduire par une relation théorique ou expérimentale entre la position sur la ligne de force et le temps; dans des conditions invariables (gaz, pression, tension) un ion de telle catégorie parcourra de la même façon en fonction du temps la ligne de force sur laquelle il s'est trouvé créé, quelle que soit cette ligne de force, aux fluctuations d'agitation thermique près.

D'autre part la fonction $p(\tau)$ relative aux deux catégories d'ions, changera en général quatre fois après l'instant initial :

Aux instants t_1 et t_2 où les ions de chaque catégorie commencent à disparaître par neutralisation sur leurs électrodes respectives;

Aux instants τ_1 et τ_2 où les derniers ions de chaque catégorie disparaissent et après lesquels les fonctions p_1 et p_2 restent nulles.

L'on conçoit que si l'on peut repérer sur l'impulsion ces instants, on puisse connaître sur quelles surfaces équipotentielles se trouvaient initialement les deux extrémités de la ligne des paires; ce renseignement, joint à la longueur de la trace déduite du nombre de paires et de la relation énergie-parcours ou plus exactement ionisation-parcours relative à la particule dans l'atmosphère gazeuse considérée, nous donnera, par exemple, par construction géométrique :

L'angle φ de la trajectoire avec le champ si la géométrie est plane ou sphérique;

Une relation géométrique entre deux paramètres d'orientation de la trajectoire par rapport au champ et à l'axe des cylindres, dans le cas de la géométrie cylindrique.

Mais les changements d'allure de la puissance ne donnent sur l'impulsion des points anguleux (les plus faciles à déceler) que dans le cas expérimentalement difficile à atteindre où cette impulsion suit suffisamment bien la puissance; en pratique ces points anguleux seront d'ailleurs toujours arrondis par la diffusion statistique des ions autour de leur mouvement moyen théorique. En fait les renseignements obtenus par cette méthode seront généralement très imprécis.

Le problème se simplifie considérablement lorsque l'on connaît déjà la position en potentiel de l'origine de la trace, en particulier lorsque la particule est issue de l'une des électrodes. Nous allons indiquer ci-après une méthode valable dans ce cas, et qui nous semble susceptible d'une précision bien supérieure.

2° *Méthode du centre des charges.* — Supposons que l'on ait pu déterminer, en plus du travail total des ions $w(\tau_2)$, le travail partiel d'une des catégories d'ions, par exemple $w_1(\tau_1)$ des ions négatifs [4].

Si r est le paramètre de longueur qui permet de repérer la position d'un ion sur une ligne de force (distance à l'une des électrodes planes, ou à l'axe des cylindres, ou au centre des sphères), on sait que le potentiel V d'une surface équipotentielle $r = \text{const.}$, peut se mettre sous la forme suivante :

$V = a(r_0 - r)$, pour la géométrie plane;

$V = a(\operatorname{Log} r_0 - \operatorname{Log} r)$ pour la géométrie cylindrique;

$V = a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$ pour la géométrie sphérique; r_0 étant la valeur que prend r pour l'électrode au potentiel zéro, et a un coefficient qui dépend de la tension V_0 et de la dimension de l'autre électrode.

Une charge quasi ponctuelle Δq_i se trouvant initialement sur la surface équipotentielle $r = \rho_i$, effectuera un travail total

$$a(r_0 - \rho_i)\,\Delta q_i$$

ou

$$a(\operatorname{Log} r_0 - \operatorname{Log} \rho_i)\,\Delta q_i$$

ou

$$a\left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{r_0}\right)\Delta q_i, \quad \text{si elle est positive ;}$$

ou la différence de ce travail avec $V_0\,\Delta q_i$ si elle est négative.

Le travail $w_2(\tau_2)$ de toutes les charges positives sera donc, selon la géométrie,

$$w_2(\tau_2) = a\sum_i (r_0 - \rho_i)\,\Delta q_i = a\,r_0\,q - a\sum_i \rho_i\,\Delta q_i$$

ou

$$w_2(\tau_2) = a\sum_i (\operatorname{Log} r_0 - \operatorname{Log} \rho_i)\,\Delta q_i$$
$$= a \operatorname{Log} r_0\, q - a\sum_i \operatorname{Log} \rho_i\,\Delta q_i$$

ou

$$w_2(\tau_2) = a\sum_i \left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{r_0}\right)\Delta q_i = a\sum_i \frac{\Delta q_i}{\rho_i} - a\frac{q}{r_0};$$

q étant la charge totale $\Sigma\,\Delta q_i$, proportionnelle au nombre de paires. On aurait par différence le travail des charges négatives $w_1(\tau_1)$.

Soit ρ la grandeur définie par

$$\rho = \frac{\sum_i \rho_i\,\Delta q_i}{q} \quad \text{pour la géométrie plane;}$$

$$\rho = \frac{\sum_i (\operatorname{Log} \rho_i)\,\Delta q_i}{q} \quad \text{pour la géométrie cylindrique;}$$

$$\rho = \sum_i \frac{\Delta q_i}{\rho_i}\,\frac{1}{q} \quad \text{pour la géométrie sphérique.}$$

[4] *Voir* l'exemple traité ci-après.

Cette valeur ρ du paramètre r détermine sur la trajectoire un point que nous appellerons « centre des charges » et tel que le rapport des travaux partiels des ions soit le même que s'ils étaient tous créés initialement en ce point. Ce point se confond avec le centre de gravité dans le cas de la géométrie plane.

La variable ρ est en général fonction :

De la particule (relation ionisation-parcours dans l'atmosphère considérée);

De l'énergie de la particule;

De la position de l'origine de la trajectoire;

De l'orientation de cette trajectoire par rapport au champ (angle φ pour les électrodes planes ou sphériques) et par rapport à l'axe du cylindre dans le cas du cylindre.

Elle est indépendante de la tension V_0.

Laissons de côté le cas du cylindre trop complexe et à peu près inutilisable lorsque le cylindre intérieur ne se réduit pas à un fil.

Il est facile, en s'aidant de ce que l'on sait par ailleurs sur l'ionisation des particules, et au besoin par des expériences spéciales préliminaires, de déterminer la surface lieu des centres pour des particules identiques d'énergie constante issues d'un point fixe pris sur une électrode.

Si l'on étudie une impulsion produite par une particule de type connu ou identifiable, si l'on est certain que l'origine de sa trace se trouve sur une électrode (ce que pourra confirmer la position de la discontinuité correspondante), et si l'on a pu déterminer w et w_1, par conséquent $\frac{w_2}{w_1} = \frac{w_2}{w - w_2}$, on connaîtra aussi le nombre total de paires (donc l'énergie), la surface lieu des centres des traces des particules de cette énergie, et par l'intersection de cette surface avec la surface équipotentielle dont le paramètre r correspond au rapport $\frac{w_2}{w_1}$ mesuré, l'angle φ cherché.

Cette méthode est indirecte, plus compliquée et plus restrictive (nécessité de situer au préalable l'origine de la trace) que celle des discontinuités. Elle est toutefois très aisément exploitable dans le cas de la géométrie plane, et susceptible de donner de bons résultats.

D. Exemple d'une chambre a électrodes planes parallèles. — On se propose par exemple d'étudier les impulsions données par les particules alphas émises par un dépôt mince sur la région centrale d'une électrode. La chambre est disposée et alimentée en tension comme l'indique le schéma de la figure 3.

La pression est telle que le parcours des particules soit inférieur à la distance des électrodes. Le gaz utilisé est tel que les électrons restent libres.

La tension est assez grande pour assurer la saturation; nous négligerons la recombinaison résiduelle.

L'électrode collectrice est reliée à un amplificateur dont la constante de temps θ est du même ordre que le temps de collection τ_2 des ions positifs.

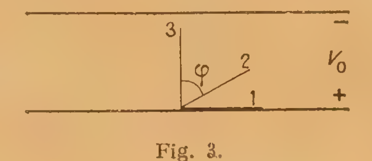


Fig. 3.

Les impulsions de sortie sont appliquées aux plaques verticales d'un oscillographe cathodique; le balayage horizontal est déclenché par un dispositif approprié par l'arrivée de l'impulsion elle-même, et sa période est choisie de l'ordre de 1 à $2\tau_2$. On photographie les impulsions.

En faisant abstraction :

De la diffusion des ions;

De leur recombinaison;

Du bruit de fond;

le calcul permet de prévoir des courbes 1, 2, 3 (*fig. 4*)

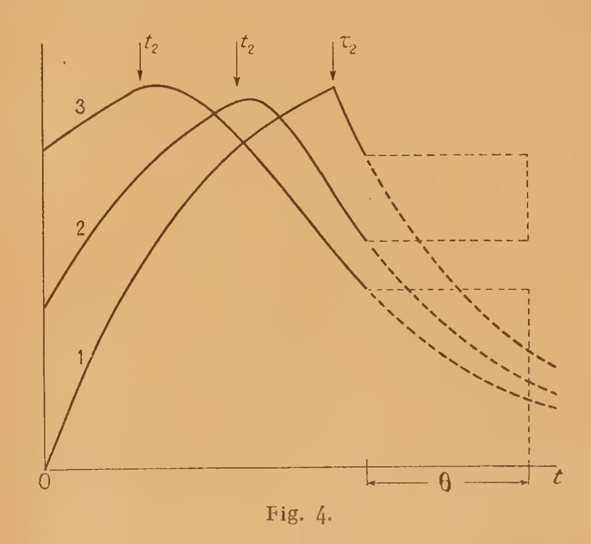


Fig. 4.

relatives aux traces 1, 2, 3 de la figure 3, ramenées au même instant initial.

1° *Constatations immédiates.* — Les courbes 2 et 3 présentent un décrochement initial dû au mouvement des électrons; ce mouvement est très rapide relativement à la vitesse du balayage et apparaît comme instantané. Du fait que θ se trouve très grand devant la durée τ_1 de vie des électrons, la hauteur du décrochement est proportionnelle au travail des électrons $w_1(\tau_1)$.

La courbe 1 comprend seulement deux branches

exponentielles séparées par l'instant τ_2, tandis que les deux autres présentent une branche intermédiaire allant de t_2 à τ_2.

Les discontinuités en t_2 et même en τ_2 (sauf pour 1) sont presque indécelables, bien que l'on n'ait pas tenu compte de la diffusion; les discontinuités en τ_2 sont dans le cas présent des points d'inflexion pour les courbes 2 et 3.

Par contre, les aires apparaissent tout à fait mesurables; le bruit de fond, en épaississant le trait, ne pourrait, sauf s'il était exagéré, entacher cette mesure d'une erreur très importante, alors qu'il interdirait complètement de repérer les discontinuités.

2° *Mesure des énergies.* — On mesure les aires totales depuis l'instant zéro jusqu'à l'infini; comme on ne peut observer, en raison de la période du balayage, la totalité de la courbe, on remplacera la partie manquante par un rectangle de largeur égale à θ.

Notons que, si l'on est certain que les particules 1 et 2 sont d'égales énergies, il est possible de déterminer θ graphiquement en cherchant la largeur du rectangle à ajouter à la partie de droite de l'aire comprise entre les deux courbes, de façon que l'aire ainsi obtenue égale la partie de gauche.

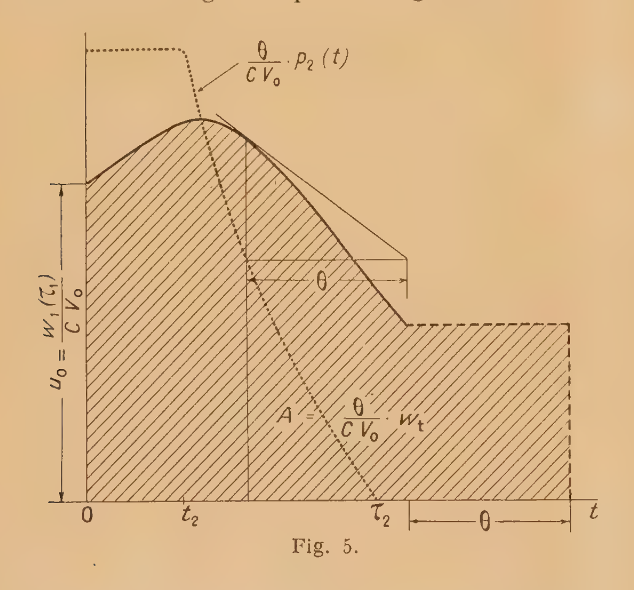


Fig. 5.

Si A est l'aire totale de l'une des courbes (*fig.* 5), le travail total des ions est

$$w_t = w_1 + w_2 = \frac{CV_0}{\theta} A.$$

On en déduit le nombre de paires N total

$$N = \frac{w_t}{\varepsilon V_0} = \frac{C}{\varepsilon\theta} A,$$

où ε représente la charge élémentaire; du nombre de paires il est facile de passer à l'énergie.

3° *Détermination de l'orientation de la trace* (*fig.* 5). — Le décrochement initial u_0 représente, compte tenu de l'échelle, la quantité $\frac{w_1(\tau_1)}{CV_0}$. On peut donc déterminer le quotient

$$\frac{w_1(\tau_1)}{w_1(\tau_1) + w_2(\tau_2)} = \theta \frac{u_0}{A}.$$

Par ailleurs, la courbe de Bragg relative au gaz de la chambre, et modifiée pour tenir compte de la pression, nous permet de situer le centre de gravité des charges par rapport aux extrémités de la trace, cette position relative variant de façon déterminée avec l'énergie de la particule. Ayant déjà déterminé l'énergie des particules étudiées, nous pourrons alors connaître la distance l de ce centre à l'origine de la trace, et, par conséquent, l'angle φ qu'elle fait avec le champ

$$\cos\varphi = \frac{d}{l} \theta \frac{u_0}{A},$$

d étant l'écartement des électrodes.

On remarquera que cette opération n'a fait intervenir que les travaux totaux des ions de chaque catégorie, et par conséquent, qu'elle doit rester insensible à une diffusion des ions, même importante, ce qui n'est pas le cas pour les discontinuités.

4° *Autres renseignements.* — On pourrait se livrer sur les courbes présentées, à la restitution complète de la fonction p_2, puissance des ions positifs, en ajoutant à l'amplitude en chaque point un supplément $\theta \frac{du}{dt}$, obtenu graphiquement (*fig.* 5). La courbe ainsi obtenue représenterait, comme l'ont indiqué Sherr et Petterson, l'ionisation en fonction du parcours, dans sa partie décroissante.

Nous ne pensons pas que cette opération, dans le cas présent, puisse être assez précise pour fournir autre chose qu'une allure ou un ordre de grandeur.

Signalons, en outre, en ce qui concerne la recombinaison, que l'effet de colonne devrait croître quand l'angle φ diminue, et que les méthodes suggérées ci-dessus pourraient être appliquées à l'étude de ce phénomène.

V. — **Conclusion.**

A la lumière de la théorie sommaire ainsi élaborée il n'est pas interdit d'envisager que les chambres d'ionisation, moyennant peut-être certains perfectionnements, puissent être utilisées comme de bons spectromètres, et même comme des appareils descriptifs de particules. Dans ce dernier ordre d'idées, les renseignements obtenus resteront sans doute limités et pour certains, imprécis; en revanche, dans tous les cas où l'on peut s'en contenter, la

chambre d'ionisation présenterait d'incontestables avantages de rendement et se prêterait à des recherches statistiques sur des phénomènes peu fréquents, à l'encontre d'appareils beaucoup plus complets et plus précis comme la chambre de Wilson. Cette technique peut s'accommoder de circuits électroniques relativement simples donc peu encombrants et semble susceptible de rendre des services dans le domaine du rayonnement cosmique en particulier.

Je tiens à remercier ici M. G. Ambrosino, dont les suggestions et les critiques avisées m'ont conduit à préciser certains points importants de ce travail, ainsi que M. Maurice de Broglie pour ses précieux encouragements.

Manuscrit reçu le 28 avril 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

SHERR R. et PETERSON R. — *Rev. Sc. Inst.*, 1947, **18**, 567.
ALFVEN H. — *Nature*, 1935, **136**, 70; *ibid.*, 1935, **136**, 394.
Particle and quantum counters. *Rev. Sc. Inst.*, 1948, **19**, 207.
BRIDGE H. S., HAZEN W. E., ROSSI B. et WILLIAMS R. W. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1083.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. SÉRIE VIII, TOME X, OCTOBRE 1949.

ÉTUDE DE LA RÉSISTANCE EN HAUTE FRÉQUENCE D'UN ENROULEMENT A FIL DIVISÉ

Par A. COLOMBANI.
Faculté des Sciences de Dijon.

Sommaire. — Après l'étude magistrale de Sommerfeld concernant la résistance en haute fréquence d'une couche cylindrique et uniforme de matière conductrice, Butterworth puis Austin, établirent des formules approchées s'appliquant à des enroulements à fil *plein* ou *divisé en brins*.

En partant directement des équations de Maxwell et en supposant le rayon du « brin » inférieur à l'épaisseur de pénétration du courant, j'ai pu établir une formule très simple concordant parfaitement avec les calculs de Sommerfeld et avec l'expérience.

En l'appliquant à différents problèmes il m'a été possible de mettre en évidence pour chacun d'eux l'existence d'une résistance optima et d'une forme particulière de bobine.

Les résultats théoriques obtenus concordent avec les données pratiques fournies par la technique moderne des enroulements. Il m'a paru intéressant de les signaler aux physiciens qui ont à déterminer rapidement et avec précision des bobinages répondant à des conditions données.

Considérons un conducteur sensiblement rectiligne et éloigné des conducteurs voisins parcouru par un courant de haute fréquence. On sait que la distribution du courant dans sa section droite n'est pas uniforme. Plus la fréquence est élevée, plus la densité de courant augmente en allant de l'axe vers la surface.

Cependant la répartition du courant autour de l'axe du conducteur est régulière et l'accroissement de résistance qui en résulte est aisément calculable. En particulier si le rayon r du conducteur est petit vis-à-vis de « l'épaisseur de peau » $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega\gamma}}$ la résistance calculée est sensiblement la même qu'en courant continu et la répartition du courant est uniforme dans la section du conducteur.

Envisageons à présent le cas de fils rapprochés parcourus par un courant de haute fréquence. Le champ magnétique produit à l'intérieur d'un fil par les courants de haute fréquence voisins cesse d'être négligeable par rapport à celui que le fil lui-même produit dans son intérieur. La distribution du courant dans le fil est donc très différente et la résistance apparente plus grande que ne le ferait prévoir l'application des formules de l'effet Kelvin relative à des conducteurs très éloignés.

C'est ce qui se produit dans tous les bobinages et en particulier dans ceux dont le fil est « divisé »

afin d'utiliser au mieux le métal parcouru par le courant de haute fréquence. Cette « division » est réalisée au moyen de brins très fins, isolés et « toronnés » ou « cordés ». Leur rayon individuel r satisfait à la relation $r << \varepsilon$ et leur enroulement est tel que chacun d'eux occupe successivement dans la section du fil toutes les positions possibles. De cette façon ils sont tous placés dans les mêmes conditions vis-à-vis du champ magnétique global extérieur. Et l'on peut très sûrement admettre que le champ magnétique dans chaque brin est *principalement* dû au voisinage des autres brins du même fil et à la proximité des spires juxtaposées du bobinage qui ajoutent leurs actions à l'intérieur du brin considéré.

Autrement dit la condition d'uniformité du champ dans lequel le brin est placé se trouve réalisée avec une grande approximation lorsque le champ magnétique dû au brin lui-même dans son intérieur est petit par rapport au champ $\vec{H}$ dû à tous les autres brins du bobinage.

Supposons donc un champ magnétique alternatif d'amplitude constante H perpendiculaire à l'axe du brin (*fig.* 1). (Nous verrons plus loin l'influence

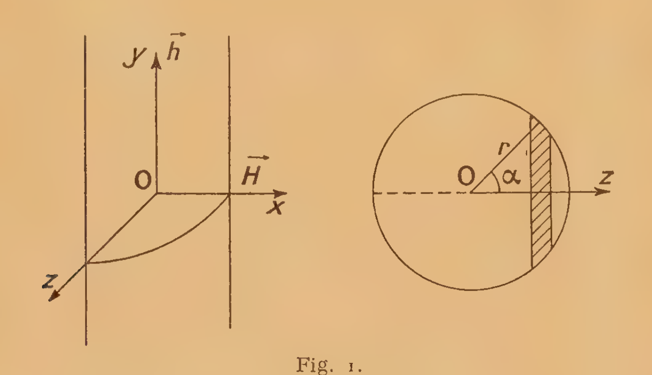


Fig. 1.

de l'obliquité du brin sur le champ). Nous pouvons assimiler à un conducteur rectiligne une portion de brin suffisamment longue par rapport à son diamètre car celui-ci est très petit vis-à-vis du rayon moyen d'enroulement de la bobine. Prenons dans la section droite du brin deux axes rectangulaires O_z, O_x l'axe O_x étant dirigé dans le sens du champ $\vec{H}$. L'axe du fil portera O_y parallèle au champ électrique $\vec{h}$ suivant lequel s'écoule le courant électrique.

La relation $\overrightarrow{\mathrm{rot}\,h} = \frac{-\partial \vec{H}}{\partial t}$ donne immédiatement

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \omega H.$$

Soient i_d la densité de courant et γ la conductibilité. On a

$$i_d = \gamma h.$$

D'où avec H uniforme

$$i_d = i_{d_0} + \omega\gamma Hz.$$

Par intégration sur la surface circulaire qui constitue la section droite, on trouve que l'intensité totale dans le brin de rayon r est $i = \pi r^2 i_{d_0}$. D'où $i_{d_0} = \frac{i}{\pi r^2}$ et par conséquent

$$i_d = \frac{i}{\pi r^2} + \omega\gamma Hz.$$

Ce résultat est d'ailleurs évident car la valeur moyenne de z est nulle et i_{d_0} est la densité moyenne de courant dans la section droite.

On en déduit l'effet Joule par unité de longueur $\frac{1}{\gamma}\iint i_d^2\,dS$, dS étant l'élément de surface

$$dS = -2R^2 \sin^2\alpha\, d\alpha \qquad \text{avec} \quad z = r\cos\alpha.$$

Soit, tous calculs faits

$$Q_F = \frac{i^2}{\pi r^2 \gamma} + \frac{\pi\omega^2\gamma r^4 H^2}{4}. \tag{1}$$

Le premier terme $\frac{i^2}{\pi r^2 \gamma}$ est l'effet Joule normal produit par l'écoulement du courant i à travers la surface πr^2 sur une longueur unité.

Le rapport de la résistance en haute fréquence à la résistance ohmique a donc pour valeur

$$Q_F : \frac{i^2}{\pi r^2 \gamma} = \frac{R_F}{R_0} = 1 + \frac{\pi^2}{4} r^6 \omega^2 \gamma^2 \frac{\overline{H}^2}{i^2}, \tag{2}$$

$\overline{H}^2$ est la valeur moyenne du carré du champ magnétique dans le volume occupé par tous les brins de l'enroulement. L'intensité i est supposée la même pour tous les brins et constante tout le long de l'enroulement. Cela nécessite donc l'utilisation de la bobine sur des fréquences très différentes de sa fréquence propre afin d'éviter la production d'oscillations localisées et par conséquent de variations d'intensité le long des fils. Enfin comme nous le verrons plus loin il y a intérêt à ce que la capacité répartie soit rejetée aux extrémités de l'enroulement (1).

Afin de calculer le rapport $\frac{\overline{H}^2}{i^2}$ nous allons maintenant avec Paul Langevin faire intervenir la forme de la bobine à l'aide de trois coefficients : α, β, η, [1].

Supposons que l'enroulement comporte n spires formées chacune de N brins. Soit D son diamètre moyen. La section droite de la gorge de la bobine

(1) Quand les fréquences sont voisines et la capacité rejetée aux extrémités on prend le point milieu de l'enroulement pour mesurer l'intensité qui servira à définir la résistance pour la fréquence fondamentale. On pose $W = RI$, W étant la puissance totale.

a pour valeur $S = el$ (*fig.* 2). On peut l'écrire

$$S = \alpha D^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{e}{D}\,\frac{l}{D}.$$

Le volume correspondant à cette gorge est

$$V = \pi S D = \pi\alpha D^3.$$

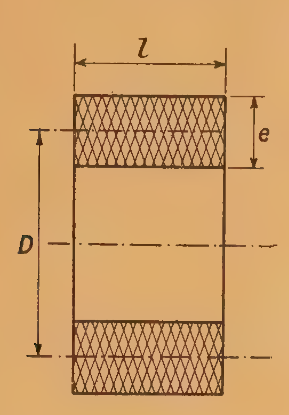


Fig. 2.

D'autre part la résistance et la self de la bobine en courant continu ont respectivement pour valeur

$$R_0 = \frac{nD}{\gamma N r^2} \quad \text{et} \quad L = \beta n^2 D$$

en posant

$$\beta = \pi^2 \frac{D}{l} \quad (^2).$$

L'énergie magnétique localisée dans la gorge est

$$\frac{1}{8\pi}\overline{H^2}\, V = \frac{\alpha}{8}\overline{H^2}\, D^3.$$

L'énergie magnétique totale est

$$\frac{1}{2} L I^2 \quad \text{avec} \quad I = Ni.$$

Appelons η leur rapport plus petit que l'unité. On a

$$\frac{\alpha}{8}\overline{H^2}\, D^3 = \frac{\eta}{2} L N^2 i^2 \quad (^3).$$

Les coefficients α, β, η ne dépendent que de la forme de la bobine et non de ses dimensions.

On en tire donc

$$\frac{\overline{H^2}}{i^2} = 4\frac{\eta}{\alpha} L \frac{N^2}{D^3}. \tag{3}$$

(²) Avec une gorge circulaire de rayon R on aurait

$$\alpha = \frac{\pi R^2}{D^2}, \qquad \beta = \frac{\pi^2 D}{2R}.$$

(³) Nous poserons $\eta = \frac{e}{D}$. L'expérience justifie cette hypothèse (*voir* plus loin).

Par conséquent (2) devient

$$R_F = \frac{nD}{\gamma N r^2}\left[1 + \pi^2 r^6 \omega^2 \gamma^2 \frac{\eta}{\alpha}\,\frac{LN^2}{D^3}\right] = \frac{nD}{\gamma N r^2}\left[1 + \pi^2 r^6 \omega^2 \gamma^2 \frac{\eta\beta}{\alpha}\,\frac{n^2 N^2}{D^2}\right],$$

ou encore

$$R_F = R_0\left[1 + \frac{\eta\beta}{\alpha}\left(\frac{\pi}{D} r^3 \omega\gamma n N\right)^2\right], \tag{4}$$

$$R_F = \frac{L}{\beta r^2}\left[\frac{1}{\gamma N n} + \frac{\eta\beta}{\alpha}\left(\frac{\pi}{D} r^3\omega\right)^2 \gamma N n\right]. \tag{5}$$

Remarque. — Considérons la valeur

$$R_F = R_0\left[1 + \frac{\eta\beta}{\alpha}\left(\frac{\pi}{D} r^3\omega\gamma n N\right)^2\right].$$

Avec les hypothèses précédentes, on a

$$\frac{\eta\beta}{\alpha} = \pi^2 \frac{D^2}{l^2}.$$

D'autre part prenons $Nn = \frac{el}{\pi r^2}$ ce qui correspond à une gorge remplie complètement par le métal de l'enroulement, et posons $e = 2qr$, q étant le nombre de couches supposées jointives.

On en tire

$$R_F = R_0[1 + 4\pi^2\gamma^2\omega^2 q^2 r^4] \quad \text{ou} \quad R_F = R_0\left[1 + q^2\frac{r^4}{\varepsilon^4}\right],$$

en désignant par ε l'épaisseur de pénétration $\varepsilon = (2\pi\omega\gamma)^{-\frac{1}{2}}$.

On retrouve ainsi facilement un résultat établi autrefois par Sommerfeld [2] pour un cas particulier bien vérifié par l'expérience.

Discussion sur la validité des résultats. —

1° Considérons d'abord le champ magnétique $\vec{H}$. Nous l'avons supposé uniforme. En fait, ce n'est pas tout à fait le cas. Le défaut d'uniformité sur $\vec{H}$ provient surtout de la partie de ce champ due à l'action du courant passant dans le brin lui-même et les brins voisins, principalement de ceux qui sont toronnés avec lui dans le même fil. L'influence maxima de ces fluctuations sur le résultat c'est-à-dire l'erreur relative sur le second terme de (2) peut se calculer en remarquant que les variations d'intensité du champ dues aux courants dans des brins voisins, sont au plus de l'ordre de $\frac{i}{r}$.

Comme

$$\frac{i}{\sqrt{\overline{H^2}}} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{\alpha D^3}{4\eta L}},$$

on a donc pour l'erreur relative sur $\sqrt{\overline{H^2}}$

$$\frac{i}{r\sqrt{\overline{H^2}}} = \frac{1}{Nr}\sqrt{\frac{\alpha D^3}{4\eta L}} \quad (\mathcal{U}). \tag{6}$$

Cette quantité qui est la condition d'uniformité ($\mathcal{U}$) doit être petite [4].

D'autre part le champ $\vec{H}$ serait normal au plan des spires si celles-ci étaient centrées sur l'axe de la bobine. Mais une composante longitudinale du champ magnétique s'introduit par suite de la forme hélicoïdale des enroulements.

Deux effets en résultent :

A. Le brin n'est pas normal au plan méridien contenant $\vec{H}$.

Il en résulte par conséquent une composante longitudinale $\vec{H_l}$ du champ $\vec{H}$ qui donne naissance par induction dans la masse du brin à des courants circulaires autour de son axe.

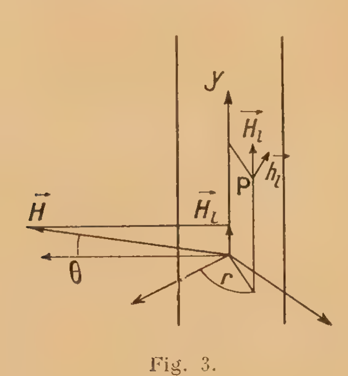


Fig. 3.

Les équations de Maxwell s'écrivent pour ce cas (*fig.* 3) :

$$j_d = \gamma h_l \qquad (j_d = \text{densité de courant}),$$

$$\operatorname{rot} h_l = \frac{1}{r}\frac{\partial(r h_l)}{\partial r} = -\omega H_l \qquad \text{d'où} \qquad h_l = -\frac{r}{2} H_l \omega$$

et

$$j_d = -\frac{\omega\gamma r}{2} H_l \qquad (H_l \text{ constant}),$$

r désignant la distance d'un point P de la section droite à l'axe du brin.

Supposons la longueur d'onde de l'oscillation créant $\vec{H}$ grande devant les dimensions du conducteur et négligeons les courants de déplacement. Un calcul classique donne pour la puissance dépensée par effet Joule [4[:

$$W_l = \frac{H_l^2}{8}\pi\gamma\omega^2 r^4 \qquad (7)$$

soit avec $H_l = H \sin\theta$ (θ angle de $\vec{H}$ avec la normale au brin) :

$$W_l = \frac{\pi\gamma\omega^2 r^4}{8} H^2 \sin^2\theta,$$

r désignant ici le rayon du brin.

L'angle θ fait intervenir le pas de l'enroulement. Lorsque les spires sont d'une inclinaison telle que $\sin^2\theta$ n'est pas négligeable, il y a évidemment lieu d'en tenir compte dans l'expression générale de R_F. L'expression (2) devient

$$R_F = R_0\left[1 + \frac{\pi^2}{4} r^6\omega^2\gamma^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\frac{\overline{H^2}}{i^2}\right]$$

ou

$$R_F = R_0\left[1 + \frac{\eta\beta}{\alpha}\left(\frac{\pi}{D} r^3\omega\gamma nN\right)^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\right],$$

$$R_F = \frac{L}{\beta r^2}\left[\frac{1}{\gamma nN} + \pi^2\frac{\eta\beta}{\alpha}\frac{\omega^2}{D^2} r^6\gamma nN\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\right].$$

En introduisant le pas de l'enroulement $p = \pi D \operatorname{tg}\theta$ on obtient

$$R_F = \frac{L}{\beta r^2}\left[\frac{1}{\gamma nN} + \pi^2\frac{\eta\beta}{\alpha}\frac{\omega^2}{D^2} r^6\gamma nN \times\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\pi^2 D^2 + p^2}\right)\right]. \qquad (8)$$

Si θ est petit le terme $\frac{1}{2}\sin^2\theta$ est négligeable [5].

B. Les N brins du fil enroulés suivant une hélice dont la tangente fait un angle φ avec l'axe du fil

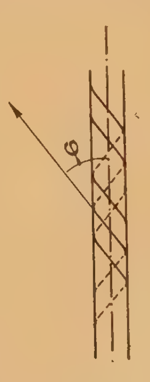


Fig. 4.

produisent à l'intérieur de celui-ci, suivant son axe un champ $H_\varphi = \frac{2Ni}{a}\sin\varphi$, a étant le rayon du fil (*fig.* 4). Ce champ longitudinal donne lieu à un dégagement de chaleur calculable par (7) en remplaçant H_l par H_φ

$$W_\varphi = \frac{\pi\gamma\omega^2 r^4}{8}\frac{4N^2 i^2}{a^2}\sin^2\varphi. \qquad (9)$$

Son rapport avec le second terme de (2) est

$$\frac{2N^2 i^2}{a^2\overline{H^2}}\sin^2\varphi,$$

(4) Le calcul de la résistance optima nous en donnera une signification très simple.

(5) Nous négligerons θ pour les applications.

soit, en remplaçant $\frac{i^2}{H^2}$ par sa valeur (3) :

$$W_\varphi = \frac{2}{a^2} \frac{\alpha D^3}{4\eta L} \sin^2 \varphi. \qquad (10)$$

Comme $a^2 > Nr^2$, W_φ est supérieur à $\frac{1}{N^2 r^2} \frac{\alpha D^3}{4\eta L} 2N \sin^2\varphi$ c'est-à-dire au carré de la condition ($\mathcal{U}$) multiplié par $2\ N\sin^2\varphi$. On peut donc admettre que W_φ est certainement négligeable.

2° Nous avons admis que l'intensité i était constante le long de l'enroulement. Ceci conduit à considérer les phénomènes d'ondes stationnaires auxquels la capacité résiduelle de la bobine peut donner naissance.

Supposons la bobine fermée sur une capacité Γ dans un circuit résonant. La force électromotrice induite dans l'enroulement produit des ondes qui se propagent dans les fils et se réfléchissent partiellement à la discontinuité du condensateur. Il en résulte un système d'ondes stationnaires presque parfait en raison du peu d'énergie dépensée.

A la résonance tant que Γ est assez grand la longueur d'onde λ_0 le long de l'axe de la bobine est grande devant la demi-longueur du fil Φ et le calcul montre que l'intensité est sensiblement constante le long du fil jusqu'à ses extrémités. Si Γ diminue, la fréquence de résonance augmente, λ_0 diminue et tend vers Φ et le courant i subit des variations sinusoïdales le long du conducteur. Il décroît considérablement aux extrémités de l'enroulement, et présente un ventre en son milieu. Si nous désignons par C la capacité propre de la bobine aussi faible que possible et supposée rejetée à ses extrémités, la nécessité de maintenir l'intensité constante le long de l'enroulement conduit donc à l'utiliser sur des fréquences très différentes de sa fréquence propre

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

En appelant Γ la capacité en circuit, la condition de bonne résonance sera donc $\Gamma \gg C$.

Remarques sur la capacité répartie C. — La capacité répartie doit être aussi faible que possible. Une capacité trop élevée limite en effet inférieurement la bande de longueur d'onde recevable avec la bobine et un condensateur donné Γ. Elle se traduit d'autre part par des pertes d'énergie, c'est-à-dire par une augmentation de la résistance R_F, donc aussi de l'amortissement.

Pour des raisons d'encombrement, les enroulements sont réalisés en plusieurs couches bobinées de différentes manières. Souvent les bobinages sont en sens inverse d'une couche à l'autre : la tension entre spires correspondantes est donc constante ce qui diminue les pertes. D'ailleurs un intervalle d'air d'autant plus faible que la fréquence est plus basse sépare spires et couches [6].

En assimilant les couches d'un tel enroulement aux armatures de condensateurs cylindriques coaxiaux montés en cascade on obtient comme ordre de grandeur de la capacité propre

$$C = \frac{1}{2} \frac{l}{e\tau} D.$$

D :diamètre moyen de l'enroulement;
l : longueur axiale;
e : épaisseur de l'enroulement;
τ : rapport de l'épaisseur totale de l'isolant (air compris) à l'épaisseur totale de l'enroulement.

En particulier si l'épaisseur de l'isolant séparant deux couches égale le diamètre du fil : $\tau = \frac{1}{2}$; et pour une gorge carrée : $l = e$. Donc C est de l'ordre de grandeur du diamètre moyen D exprimé en centimètres. En U. E. M. C est de l'ordre de grandeur de

$$\frac{1}{v^2} D. \qquad (11)$$

Il y a donc intérêt à employer des bobines de faible diamètre moyen si l'on désire diminuer la capacité répartie. De plus l'étalement extérieur du champ de la bobine est moins grand avec un petit diamètre. On diminue également C en cloisonnant la bobine en sections ou galettes montées en cascade et enroulées suivant le principe exposé plus haut. Un calcul très simple donne alors pour la capacité répartie la valeur

$$C = \frac{1}{v^2} \frac{D}{4} \frac{e}{l\tau'} \text{ U. E. M.},$$

où τ' est la fraction de longueur axiale totale l occupée par le diélectrique.

En particulier pour $\tau' = \frac{1}{2}$,

$$C = \frac{1}{v^2} \frac{D}{2} \frac{e}{l} \text{ U. E. M.} \quad (^7)$$

Si l est assez grand devant e la capacité C est donc plus petite que dans l'enroulement par couches. Pour une gorge carrée

$$C = \frac{1}{v^2} \frac{D}{2} \text{ U. E. M.},$$

valeur comparable à (11).

Avec le cloisonnement, seules les galettes extrêmes prennent une charge électrique importante sous l'influence des galettes voisines, tandis que les charges intérieures se neutralisent deux à deux. La capacité propre de la bobine est donc pour sa

[6] En basse fréquence les pertes sont plus faibles et l'intervalle d'air peut être supprimé.
[7] La capacité radiale des galettes est négligeable.

plus grande part rejetée aux extrémités de l'enroulement. Cependant si la subdivision en sections n'est pas assez poussée, l'existence de capacités le long de l'axe risque de créer dans chaque cloisonnement des déphasages du courant uniforme qui circule dans l'enroulement.

Lorsque le coefficient de self est assez élevé ($L > 2\ mH$), la technique moderne des bobinages utilise des enroulements dits « massés » dont la capacité propre est d'autant plus faible que les spires qui voisinent dans le bobinage ont un numéro d'ordre très différent. En observant cette règle, on a été conduit à la meilleure disposition possible qui est celle du nid d'abeilles (honeycomb coil) dans laquelle les spires chevauchent l'une sur l'autre et sont décalées suivant des éléments d'hélice orientés successivement de gauche à droite et de droite à gauche. Il en résulte donc un croisement des fils des couches voisines et une séparation des spires parallèles par une distance au moins égale au diamètre du fil.

Ainsi les liaisons haute et moyenne fréquence des lampes amplificatrices sont constituées de petits nids d'abeilles de trois centimètres environ de diamètre moyen. Par contre pour les ondes courtes, on utilise les enroulements cylindriques à une seule couche à spires jointives ou écartées.

En conclusion de ces remarques nous pouvons dire que la valeur $C = \frac{1}{v^2} D$ U.E.M. représente l'ordre de grandeur de la limite supérieure de la capacité répartie si le bobinage n'est pas compact ou s'il est réalisé sous forme de nid d'abeilles.

La condition de bonne résonance s'écrira donc

$$\Gamma \geqslant \frac{1}{9} \cdot 10^{-20} D.$$

On pourra prendre par exemple

$$\Gamma = kD \qquad \text{avec} \quad k = 10^{-20}. \tag{12}$$

Applications. — Différentes variables qui sont l'encombrement, la fréquence, la self, la puissance, le volume du métal, le facteur de surtension interviennent dans la technique pour fixer les dimensions et le mode d'enroulement d'une bobine.

Nous allons étudier quelques exemples.

Supposons que la bobine soit insérée dans un circuit de capacité Γ bien déterminée destiné à émettre une longueur d'onde λ. Toutes corrections faites pour tenir compte des fils extérieurs à la bobine, la self est fixée par la relation $L = \frac{1}{\Gamma \omega^2}$.

1° On se donne D (à partir de l'encombrement par exemple). On a

$$R_F = \frac{L}{\beta r^2}\left[\frac{1}{\gamma N n} + \frac{\pi^2 \eta \beta \omega^2 r^6}{\alpha D^2} \gamma N n\right].$$

Cette expression présente un minimum $\mathcal{R}$ pour

$$\gamma^2 N^2 n^2 = \frac{\alpha D^2}{\pi^2 \eta \beta \omega^2 r^6},$$

soit

$$\gamma N n = \frac{D}{\pi \omega r^3}\sqrt{\frac{\alpha}{\eta\beta}}. \tag{13}$$

Comme

$$L = \beta n^2 D \qquad \text{et} \qquad R_0 = \frac{nD}{\gamma N r^2} = n^2 \pi r \omega \sqrt{\frac{\eta\beta}{\alpha}},$$

on en déduit

$$\mathcal{R} = \frac{2 L \pi \omega r}{\beta D}\sqrt{\frac{\eta\beta}{\alpha}} = 2 n^2 \pi r \omega \sqrt{\frac{\eta\beta}{\alpha}}.$$

Donc

$$\mathcal{R} = 2 R_0 = \frac{2 L \pi \omega r}{D}\sqrt{\frac{\eta}{\beta\alpha}}. \tag{14}$$

La résistance minima en haute fréquence est double de la résistance en courant continu.

L étant fixé, il y a donc intérêt à utiliser un fil fin ($2r$ petit) enroulé sur une bobine de grand diamètre moyen D.

De plus le facteur de forme est $\sqrt{\frac{\eta}{\beta\alpha}}$. Or on a

$$\alpha = \frac{el}{D^2}, \qquad \beta = \frac{\pi^2 D}{l},$$

et physiquement il est logique de prendre pour valeur approchée de η, rapport des énergies la valeur $\frac{e}{D}$. Dans ces conditions le facteur de forme est sensiblement indépendant de la forme de la bobine et égal à $\frac{1}{\pi}$. C'est bien ce qui est vérifié par l'expérience, du moins pour des gorges à section rectangulaire [8].

On en déduit la résistance optima

$$\mathcal{R} = \frac{2 L r \omega}{D}, \tag{15}$$

valeur remarquable indépendante de la conductibilité, donc de la nature du métal.

Pour l'optima, l'égalité (13) donne le nombre de brins par fil

$$N = \frac{D^{\frac{3}{2}}}{\pi \omega \gamma r^3}\sqrt{\frac{\alpha}{\eta L}} \tag{16}$$

et la section

$$s = \pi N r^2 = \frac{D^{\frac{3}{2}}}{r \omega \gamma}\sqrt{\frac{\alpha}{\eta L}}. \tag{17}$$

Remarquons aussi que la condition ($\mathcal{U}$) d'unifor-

[8] Avec une gorge circulaire : $\beta = \frac{\pi^2 D}{2R}$, $\alpha = \frac{\pi R^2}{D^2}$, $\eta = \frac{2R}{D}$ (en première approximation). Donc le facteur de forme vaudrait $\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ qui est voisin de $\frac{1}{\pi}$.

mité du champ qui exige que la quantité

$$\frac{1}{Nr}\sqrt{\frac{\alpha D^3}{4\eta L}}$$

soit très petite donne avec (6) :

$$(\mathcal{U})\qquad \sqrt{\frac{\eta L}{\alpha}}\,\frac{\pi\omega\gamma r^3}{r D^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\alpha D^3}{4\eta L}} = \frac{\pi\omega\gamma r^2}{2} < 1.$$

Il faut donc pour que la condition $(\mathcal{U})$ soit réalisée, que l'on ait

$$r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega\gamma}}.$$

Cette inégalité exprime que l'épaisseur de peau $\varepsilon = (2\pi\omega\gamma)^{-\frac{1}{2}}$ est supérieure au rayon du brin. Autrement dit *la condition nécessaire et suffisante d'uniformité du champ pour la résistance optima est celle de pénétration complète du courant dans chaque brin.*

Cette conclusion est en accord avec notre hypothèse initiale.

Application numérique. — Considérons une bobine faisant partie d'un circuit destiné à émettre une longueur d'onde $\lambda = 100$ m, la capacité Γ totale étant $7.10^{-5}\mu F$. On en déduit $\omega = 6\pi.10^6$ et

$$L = \frac{10^{-1}}{7.36\pi^2}\,\mathrm{H} = \frac{10^8}{7.36\pi^2}\,\mathrm{U.\,E.\,M.}$$

Supposons l'enroulement réalisé en fil de cuivre isolé de diamètre $2r = \frac{1}{125}$ cm et de conductibilité

$$\gamma = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{U.\,E.\,M.}$$

Soit $D = 4$ cm le diamètre moyen d'enroulement, ce qui correspond à une valeur courante. La résistance optima aura pour valeur

$$\mathcal{R} = \frac{2rL\omega}{D} = 1,5\,\omega.$$

Le nombre de brins par fil donné par

$$N = \frac{D^{\frac{3}{2}}}{\pi\omega\gamma r^3}\sqrt{\frac{\alpha}{\eta L}}$$

avec

$$\frac{\alpha}{\eta} = \frac{l}{D} = \frac{1}{4} \qquad \text{(rapport usuel)},$$

sera tous calculs faits $N = 10$ et la section du fil

$$s = N\pi r^2 = 0,05\ \mathrm{mm}^2.$$

L'épaisseur de peau est

$$\varepsilon = (2\pi\omega\gamma)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{242} > \frac{1}{250}.$$

La condition d'uniformité est donc satisfaite.

Cependant l'expérience et la théorie montrent qu'au-dessous de 100 m voire même 200 m, le bobinage à fil divisé est plus résistant qu'avec un fil plein de même diamètre. Cela tient à ce que les pertes dans l'isolant qui entoure chaque brin deviennent trop importantes pour des fréquences supérieures à 2 000 ou 3 000kc.

Prenons un autre exemple

$$\lambda = 300\ \mathrm{m}, \qquad \Gamma = 1,5.10^{-4}\,\mu\mathrm{F}.$$

D'où

$$L = \frac{10^{-2}}{6\pi^2}\,\mathrm{H} = \frac{10^7}{6\pi^2}\ \mathrm{U.\,E.\,M.}$$

Avec $2r = \frac{1}{100}$ on déduit par les formules précédentes

$$\mathcal{R} = 2,65\,\omega, \qquad N = 7,5 \qquad \left(\text{pour } \frac{\alpha}{\eta} = \frac{l}{D} = \frac{1}{4}\right)$$

et

$$s = 0,06\ \mathrm{mm}^2.$$

La condition d'uniformité $r < \varepsilon$ est évidemment satisfaite.

J'ai dressé ci-dessous un tableau qui pour une gamme de longueur d'onde variant de 200 m à 20 000 m. donne les valeurs de $\mathcal{R}$ de N et de s pour $\frac{l}{D} = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$. (Tableau I) [9]. Les résultats obtenus par ce calcul sont en excellent accord avec ceux qui sont donnés par les constructeurs pour des enroulements du type « soigné » réalisés par exemple en nid d'abeilles (self-mignonnette) et utilisés universellement à l'heure actuelle.

Au dessus de 300 m. les valeurs de $\mathcal{R}$ obtenues avec du fil divisé sont toujours inférieures à celles correspondant au même bobinage réalisé en fil plein. Remarquons enfin qu'un accroissement du diamètre D (lorsque cela est possible) produit toujours une diminution de $\mathcal{R}$.

Remarque. — Pour diminuer la capacité répartie il y a intérêt à ce que le volume occupé par le métal $\pi^2 r^2 nND$ soit petit par rapport au volume de la gorge qui le contient $\pi\alpha D^3$ c'est-à-dire à ce que le rapport

$$\delta = \frac{\pi r^2 N n}{\alpha D^2}$$

soit petit. A l'optimum on a

$$Nn = \frac{1}{\gamma}\,\frac{D}{\pi\omega r^3}\sqrt{\frac{\alpha}{\eta\beta}}.$$

Donc

$$\delta = \frac{1}{\omega\gamma r D}\sqrt{\frac{1}{\alpha\eta\beta}}. \tag{18}$$

Avec

$$\alpha = \frac{el}{D^2}, \qquad \beta = \frac{\pi^2 D}{l}, \qquad \eta = \frac{e}{D},$$

[9] Les valeurs de Γ et de L indiquées dans le tableau correspondent à des circuits normaux de réception.

on obtient
$$\delta = \frac{1}{\pi\omega\gamma r D}\,\frac{D}{e}.$$

En supposant $\frac{D}{e} = 4$ (ordre de grandeur assez fréquent) la valeur de δ s'écrit finalement

$$\delta = \frac{4}{\pi\omega\gamma r D}.$$

Cette quantité devant être inférieure à l'unité ($\omega\gamma$ étant donné) il en résulte une limite inférieure du produit rD au-dessous de laquelle le bobinage devient compact et par conséquent de forte capacité répartie car le coefficient k de la formule $C = kD$ est alors supérieur à $\frac{1}{v^2}$.

Tableau I.

					$\frac{l}{D}=4.$		$\frac{l}{D}=2.$		$\frac{l}{D}=1.$		$\frac{l}{D}=\frac{1}{2}.$		$\frac{l}{D}=\frac{1}{4}.$		$\frac{l}{D}=\frac{1}{8}.$	
$d = 2r$.	λ (m).	Γ (mμF).	L (mH).	$\mathcal{R}_\omega$. $D = 4$ cm.	N.	s (mm²).	N.	s (mm²).	N.	s (mm²).	N.	s (mm²).	N.	s (mm²).	N.	s (mm
$\frac{1}{125}$ ...	100	7.10^{-2}	0,039	1,5	41	0,2	29	0,14	20	0,1	14	0,07	10	0,05	7	0,0
$\frac{1}{100}$ ...	200	0,11	0,11	2,4	27	0,2	19	0,15	13,5	0,1	9,5	0,07	6,7	0,05	4,7	0,0
» ...	300	0,15	0,167	2,65	31	0,24	22	0,17	15,5	0,12	11	0,09	7,5	0,06	5,5	0,0
» ...	600	0,23	0,438	3,45	38	0,30	27	0,21	19	0,15	13,5	0,11	9,5	0,07	6,7	0,0
» ...	1 000	0,3	0,934	4,62	43	0,34	30	0,24	21,5	0,17	15	0,12	10,7	0,08	7,6	0,0
» ...	3 000	0,64	4,201	6,62	62	0,46	44	0,34	31	0,23	22	0,17	15,5	0,12	11	0,0
» ...	6 000	1	10,13	7,95	80	0,63	56	0,44	40	0,32	28	0,22	20	0,16	14	0,1
» ...	10 000	1,5	18,68	8,85	99	0,77	70	0,54	49,5	0,39	35	0,27	28,7	0,19	17,5	0,1
				$D = 6$ cm.												
» ...	15 000	2	31,51	6,63	208	1,6	148	1,16	104	0,80	74	0,58	52	0,40	37	0,2
» ...	20 000	2,4	46,66	7,35	228	1,76	160	1,24	114	0,88	80	0,62	57	0,44	40	0,3

Comme la valeur maxima de r est fixée par la condition de pénétration on en déduit donc une limite inférieure de D. Et les considérations d'encombrement, la nécessité d'éviter l'étalement du champ magnétique extérieur de la bobine, la possibilité de réaliser de fortes amplifications ont conduit la technique à l'adoption de petits diamètres moyens malgré l'augmentation corrélative de la résistance optima.

Exemples. — Sur l'onde de 20 000 m avec $D = 6$ cm on obtient

$$\delta = 0{,}88.$$

L'espacement des spires est tout juste suffisant. Sur 15 000 m avec $D = 6$ cm on a $\delta = 0{,}67$, ce qui permet un bobinage à faible capacité répartie. D'ailleurs au-dessous de 15 000 m on peut employer un diamètre plus faible. Par exemple pour

$$\lambda = 10\,000 \text{ m}, \qquad D = 4 \text{ cm} : \delta = 0{,}67.$$

Pour des fréquences croissantes δ est évidemment de plus en plus faible : sur l'onde de 300 m avec $D = 4$ cm ou $D = 2$ cm on a

$$\delta = 0{,}02 \qquad \text{ou} \qquad \delta = 0{,}04,$$

les enroulements peuvent être très satisfaisants.

2° La valeur de la self étant toujours donnée, ainsi que le rayon du brin, supposons qu'au lieu du diamètre moyen D on se fixe le volume du métal $V = \pi^2 r^2 nND$. Il s'agit de déterminer la bobine qui utilise le mieux son métal pour une self et un volume donnés.

Transportons la valeur $D = \frac{V}{\pi^2 r^2 nN}$ dans la formule générale de la résistance (5). On obtient

$$R_F = \frac{L}{\beta r^2}\left[\frac{1}{\gamma N n} + \frac{\pi^6 r^{10}\eta\beta\gamma\omega^2 N^3 n^3}{\alpha V^2}\right]$$

dont le minimum a lieu pour

$$Nn = \sqrt{\frac{V}{\pi^3 r^5 \gamma\omega}}\left(\frac{\alpha}{3\eta\beta}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

La résistance optima est alors

$$\mathcal{R} = \frac{L}{\left(\frac{\gamma V}{\pi^3 r\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha\beta^3}{\eta}\right)^{\frac{1}{4}}}\,\frac{4}{3^{\frac{3}{4}}} \# \frac{7}{4}\,\frac{L}{\left(\frac{\gamma V}{\pi^3 r\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha\beta^3}{\eta}\right)^{\frac{1}{4}}}. \qquad (19)$$

D'autre part

$$R_0 = \frac{nD}{\gamma N r^2} = \frac{L}{3\gamma r^2 n N},$$

qui en tenant compte de Nn à l'optima donne

$$R_0 = \frac{L}{\left(\frac{\gamma V}{\pi^3 r\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha\beta^3}{3\eta}\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Donc

$$\mathcal{R} = \frac{4}{3} R_0.$$

$\mathcal{R}$ est donc plus voisin de la valeur ohmique R_0 que

dans le cas précédent où l'on s'était fixé le diamètre moyen.

En prenant D comme variable au lieu de Nn on aboutit au même résultat : la résistance R_F passe par un minimum $\mathcal{R}$ lorsqu'elle est égale aux $\frac{4}{3}$ de la résistance ohmique. Très sensiblement on a

$$\mathcal{R} = \frac{7}{4} L \pi^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\omega r}{\gamma V}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\eta}{\beta^3 \alpha}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (20)$$

Le facteur de forme $\left(\frac{\eta}{\beta^3\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ n'est plus approximativement indépendant de la forme de la bobine comme dans le cas précédent. En remplaçant α, β, η par leurs valeurs il s'écrit $\left(\frac{1}{\pi^3}\frac{l}{D}\right)^{\frac{1}{2}}$.

D'où

$$\mathcal{R} \# \frac{7}{4} L \left(\frac{\omega r}{\gamma l}\frac{l}{D}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

De plus l'influence du diamètre moyen sur la valeur de $\mathcal{R}$ est moins importante ($D^{-\frac{1}{2}}$ au lieu de D^{-1}). Par contre, la longueur de la bobine joue un rôle important. A première vue il y a intérêt à rendre le rapport $\frac{l}{D}$ aussi petit que possible. Cependant l ne doit pas descendre à une valeur trop faible afin que la définition de $\sqrt{\overline{H^2}}$ soit toujours valable.

L'étude se poursuit comme dans le premier cas. En particulier à l'optima

$$N \# \frac{3}{4}\left(\frac{DV}{L\pi^2 r^3 \gamma\omega}\right) \quad (22)$$

et

$$s = \pi N r^2 \# \frac{3}{4}\left(\frac{DV}{Lr\gamma\omega}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Dans l'ensemble, cette condition conduit donc à l'adoption d'une forme de bobine moins massive que dans le premier cas.

3° Comme dernière application envisageons le cas d'un circuit d'accord formé d'une self L et d'une capacité Γ en dérivation. A la résonance on a $\Gamma = \frac{1}{L\omega^2}$. Supposons que ce circuit reçoive une puissance W. A la résonance, son impédance est $Z = \frac{L^2\omega^2}{R_F}$ et si E est la différence de potentiel qui apparaît aux extrémités de la bobine, on a

$$W = E^2 \frac{R_F}{L^2\omega^2}.$$

Pour une puissance donnée, E sera d'autant plus grand que $\frac{R_F}{L^2\omega^2}$ est petit. D'autre part nous avons vu que l'on pouvait poser $\Gamma = kD$. D'où

$$L = \frac{1}{kD\omega^2}.$$

Le problème revient donc à chercher le minimum de l'expression

$$\theta = \frac{R_F}{L^2\omega^2} = \frac{k}{\beta r^2}\left[\frac{D}{\gamma Nn} + \frac{\pi^2\eta\beta\omega^2 r^6}{\alpha D}\gamma Nn\right] \quad (24)$$

qui a lieu pour

$$\gamma Nn = \frac{D}{\pi\omega r^3}\sqrt{\frac{\alpha}{\eta\beta}}.$$

La valeur de θ est alors

$$\theta = 2k\pi\omega r\sqrt{\frac{\eta}{\alpha\beta}}. \quad (25)$$

Avec nos précédentes conventions sur α, β, η, on tire

$$\theta = 2k\omega r = 2\Gamma\omega\frac{r}{D} \text{ [10]}. \quad (26)$$

Comme dans le premier cas étudié, *la valeur optima de θ s'obtient quand la résistance apparente est double de la résistance en courant continu.* Le facteur de forme $\sqrt{\frac{\eta}{\alpha\beta}}$ est le même.

Mais la relation $\Gamma = kD$ exige pour sa validité un enroulement peu compact. Cette condition conduit à des bobinages moins massifs que dans le premier cas.

Prenons l'exemple d'un bobine répondant aux caractéristiques suivantes :

$$\lambda = 200 \text{ m}, \quad \mathcal{R} = 0{,}96\ \omega, \quad D = 10 \text{ cm},$$
$$L = 0{,}11 \text{ mH}, \quad 2r = \frac{1}{100} \text{ cm}.$$

On a

$$\frac{\mathcal{R}}{L^2\omega^2} = 0{,}85 \, . \, 10^{-15}.$$

D'autre part à l'optima

$$\theta = 2k\omega r = 2 \, . \, 10^{-20}\, 3\pi \, . \, 10^6 \frac{1}{200} = 0{,}94 \, . \, 10^{-15}.$$

Le rapport $\tau = \frac{\mathcal{R}}{L^2\omega^2}\frac{1}{\theta} \approx 0{,}95$ est excellent.

Par contre, un bobinage pour grandes ondes $\lambda = 20\,000$ m avec

$$\mathcal{R} = 4{,}22\ \omega, \quad D = 10 \text{ cm},$$
$$L = 46{,}66 \text{ mH}, \quad 2r = \frac{1}{100} \text{ cm}$$

donne

$$\frac{\mathcal{R}}{L^2\omega^2} = 21 \, . \, 10^{-17} \quad \text{et} \quad \theta = 0{,}94 \, . \, 10^{-17}.$$

D'où

$$\tau = 22.$$

En modifiant l'enroulement de façon que $\frac{\mathcal{R}}{L^2\omega^2}$ soit environ vingt-deux fois plus faible, la différence

[10] Les dimensions de la bobine *interviennent par l'intermédiaire du facteur k.*

de potentiel disponible aux extrémités de l'enroulement (pour une même puissance) sera $\sqrt{22} = 4{,}69$ fois plus grande.

J'ai dressé un tableau donnant les valeurs de τ pour des bobines de diamètre $D = 10$ cm et $D = 4$ cm dont la résistance est celle correspondant à l'optimâ (deux fois la résistance ohmique) et pour des longueurs d'onde comprises entre 200 m et 20 000 m (Tableau II). On voit que τ est d'autant plus faible que la fréquence est plus élevée et que le diamètre moyen est plus grand, c'est-à-dire la bobine *moins compacte*. Il faudra donc agir dans ce sens sur le mode d'enroulement si l'on veut recueillir la différence de potentiel maxima pour une puissance donnée dans le circuit oscillant.

Tableau II.

λ (m).	$\frac{\mathcal{R}_{10}}{L^2\omega^2}$.	$\frac{\mathcal{R}_4}{L^2\omega^2}$.	θ.	τ_{10}.	τ_4.
200	$0{,}89.10^{-15}$	$2{,}22.10^{-15}$	$0{,}94.10^{-15}$	0,95	2,36
300	$0{,}91.10^{-15}$	$2{,}275.10^{-15}$	$0{,}63.10^{-15}$	1,4	3,5
600	$0{,}73.10^{-15}$	$1{,}825.10^{-15}$	$0{,}31.10^{-15}$	2,3	5,75
1 000	$0{,}6.10^{-15}$	$1{,}5.10^{-15}$	$0{,}18.10^{-15}$	3,33	8,32
6 000	$0{,}31.10^{-16}$	$0{,}775.10^{-16}$	$0{,}63.10^{-16}$	4,9	12,25
15 000	$1{,}7.10^{-16}$	$4{,}25.10^{-16}$	$0{,}12.10^{-16}$	14	35
20 000	21.10^{-17}	$52{,}5.10^{-16}$	$0{,}94.10^{-17}$	22	55

Conclusion. — Notre étude nous a conduit à une formule très simple donnant la résistance en haute fréquence

$$R_F = R_0\left[1 + \frac{\eta\beta}{\alpha}\left(\frac{\pi}{D} r^3 \omega\gamma n N\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\right],$$

et pour de petits angles

$$R_F = R_0\left[1 + \frac{\eta\beta}{\alpha}\left(\frac{\pi}{D} r^3 \omega\gamma n N\right)^2\right].$$

Ces formules sont plus maniables que celles de Butterworth et d'Austin et donnent des résultats comparables.

Nous avons vu qu'à chaque cas d'utilisation correspond une résistance optima $\mathcal{R}$ et une forme particulière de bobine, toutes deux en parfait accord avec les résultats expérimentaux obtenus par la technique des bobinages.

Il n'existe donc pas de forme idéale pour une bobine. Cette forme dépend des conditions d'utilisation : encombrement, puissance, self-induction, facteur de surtension etc.

D'une façon générale, pour les solénoïdes à une couche, on choisit le rapport $\frac{l}{D}$ compris entre 0,4 et 1 si possible voisin de 0,4. Pour une galette plate à une couche, on prend souvent $\frac{e}{D} = \frac{1}{4}$. Pour des selfs plus élevées, bobinées en solénoïdes à plusieurs couches, on prend en général les proportions suivantes [11]

$$\frac{e}{D} = \frac{1}{4} \quad \text{avec} \quad \frac{l}{D} = \frac{1}{8}$$

ou

$$\frac{e}{D} = 0{,}4 \quad \text{avec} \quad \frac{l}{D} = 0{,}1$$

ou

$$\frac{e}{D} = 0{,}15 \quad \text{avec} \quad \frac{l}{D} = 0{,}2.$$

Remarquons aussi qu'au-dessus de 3 000 kc, le fil plein devient préférable au fil divisé, même « très divisé ». En effet, les pertes dans le diélectrique qui isole chaque brin, deviennent importantes. Il existe une fréquence critique au-dessus de laquelle un fil plein de même section offre moins de résistance qu'un fil divisé. Rogowski donne comme valeur critique de la fréquence

$$f = \frac{3{,}405}{N^{\frac{3}{2}}\beta\rho r^2}$$

(N nombre de brins, r rayon du brin, $\rho = 60$ à la température ordinaire et $\beta = 3{,}54\,\frac{r}{D}\,\frac{N^{\frac{1}{2}}}{\theta}$, θ étant l'angle d'enroulement).

Cette formule correspond sensiblement à la réalité.

C'est la raison pour laquelle la partie haute fréquence des blocs d'accord est constituée par un petit solénoïde en fil plein.

[11] Ce sont les dimensions employées dans la construction des selfs pour appareils de mesure, ou dans les selfs étalons.

Manuscrit reçu le 6 avril 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Langevin P. — Le champ électrique et le champ magnétique. *Cours du Collège de France*, 1936.

[2] Sommerfeld. — *Annalen der Physik und Chemie*, 1904, 3, 673.

[3] Maxwell J. C. — Traité d'électricité et de magnétisme, 2.

[4] Colombani A. — Étude sur les courants de Foucault, *Journal de Physique*, novembre 1948, 9, série VIII.

[5] Mesny R. — Radioélectricité générale, 1.

[6] Bouasse. — Oscillations électriques (Delagrave).

[7] Bunet P. — Solénoïdes, écrans et transformateurs (Baillère).

[8] Schelkunoff. — Electro-Magnetic Waves (D. Van Nostrand Company).

[9] Butterworth S. — *Expérimental Wireless*, 3, 1926.

[10] Austin B. B. — *The Wireless Engineer*, 11 janvier 1934.

TENTATIVE D'EXPRESSION DU PHÉNOMÈNE D'HYSTÉRÉSIS DE TRACTION, POUR UN POLYMÈRE ÉLASTIQUE CRISTALLISABLE (1)

Par Jacques CLOUAIRE.
Ingénieur A. M., Ingénieur Docteur, Ingénieur du Caoutchouc I. F. C.

Sommaire. — L'étirement d'un polymère élastique cristallisable (tel que le caoutchouc naturel vulcanisé, type « pure gomme ») dans les conditions habituelles des dynamomètres commerciaux, présente les caractères suivants :

1° Irréversibilité thermodynamique des phénomènes.

2° Liaison héréditaire entre la valeur de la tension à un instant donné et les déformations antérieurement imposées.

On exprime la tension résultant d'un allongement donné, à un instant donné, en tenant compte de l'élasticité de la phase cristallisée, de celle de la phase demeurée amorphe, et de la vitesse de cristallisation à cet instant; un terme additionnel tient compte de ce que l'on appelle le frottement interne.

Les résultats obtenus montrent que la nature même du phénomène de cristallisation par étirement (tendance vers un état de cristallisation partielle, dépendant de l'allongement imposé, et de toutes les déformations précédemment subies) explique le phénomène d'hystérésis de traction particulier à ces corps.

I. Caractères expérimentaux de l'hystérésis. — Des essais expérimentaux (1) portant sur l'étude de l'hystérésis développée par des échantillons de caoutchouc naturel vulcanisé, soumis à des tractions et rétractions alternées, l'allongement pouvant aller jusqu'au voisinage de la rupture, ont permis de dégager les caractères principaux de ce phénomène, et, à leur lumière, de tenter l'interprétation qui fait l'objet de cet article.

Les conditions opératoires furent les suivantes :

1° Utilisation d'éprouvettes Schœpper standard;

2° Tractions et rétractions effectuées sur dynamomètre Lhomme et Argy; à une vitesse d'extension de 30 cm : min;

3° Tractions et rétractions se répétant sans interruption susceptible de provoquer des effets de reprise élastique;

4° Cycles décrits pour toutes les amplitudes possibles, exprimées selon un multiple entier de 100 pour 100 d'allongement relatif, pour des allongements compris entre 0 et 700 pour 100 (*voir* tableau I);

5° Nombre de cycles le plus élevé possible, ne dépassant pas cependant 2 000, mais plus limité en général (50 à 200), à cause de la rupture prématurée des échantillons.

6° Conditions de température ambiante et d'état hygrométrique controlée à 20° ± 1°C, et 60 pour 100 ± 10 pour 100 (ces valeurs n'entraînant pas de variations décelables des quantités mesurées) (2).

TABLEAU I

Allongement minimum \ Allongement maximum	0 %	100 %	200 %	300 %	400 %	500 %	600 %	700 %
0 %	0.0	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0 700
100 %		100.100	100.200	100.300	100.400	100.500	100.600	100.700
200 %			200.200	200.300	200.400	200.500	200.600	200.700
300 %				300.300	300.400	300.500	300 600	300.700
400 %					400.400	400.500	400.600	400.700
500 %						500.500	500 600	500 700
600 %							600.600	600 700
700 %								700 700

Amplitude : 700 %, 600 %, 500 %, 400 %, 300 %, 200 %, 100 %, 0 %
Essai de relaxation

Les observations peuvent se résumer aux principaux faits suivants :

1° L'hystérésis, mesurée comme l'aire d'un cycle (exprimée en unités d'énergie) rapportée à l'énergie fournie par la machine dynamométrique à l'éprouvette, lors de la traction, croît avec l'amplitude des cycles.

(1) Ce Mémoire développe les principales conclusions d'ordre théorique auxquelles ont conduit les recherches effectuées par l'auteur à l'Institut Français du Caoutchouc.

(2) L'essentiel des résultats d'essais obtenus a été publié dans la *Revue Générale du Caoutchouc* à laquelle on pourra se reporter pour plus amples détails expérimentaux.

J. Clouaire. — *Rev. Gén. Caout.*, 1949, **26**, 85-90.

2° Pour une amplitude donnée, localisée dans le domaine des allongements de façon définie, l'hystérésis diminue lorsque le nombre de cycles augmente.

3° En général, les cycles successifs ne se superposent pas les uns aux autres, mais se déplacent vers les tensions plus basses.

Bien qu'on n'ait pu mettre en évidence une limite à cette migration, son importance diminue lorsque le nombre de cycles augmente.

4° A amplitude égale, l'hystérésis est sensiblement indépendante de la localisation dans le domaine des allongements alors que la migration augmente lorsqu'on se déplace vers les allongements plus grands.

5° La migration est d'autant plus accusée que l'amplitude est grande.

6° Le repos prolongé entre les cycles successifs entraîne le retour lent vers les valeurs déjà observées. Ainsi, pour des cycles décrits entre 0 et 700 pour 100, le premier et le deuxième étant décrits sans interruption, et le troisième après un repos de durée variable de l'éprouvette, en l'absence de toute tension imposée, au bout de 8 jours, ce troisième cycle est superposé au deuxième. Au bout de 30 semaines, ce troisième cycle est compris entre le deuxième et le premier. Il semble toutefois que le retour aux conditions exactes de l'origine soit très lent, sinon impossible.

7° Il semble *a priori* que l'on pourrait délimiter la zone d'allongements, de 0 à la rupture, en deux régions :

a. au-dessous d'un allongement sensiblement égal à 200 pour 100, l'hystérésis est faible, et la migration négligeable.

b. au-dessus de cet allongement, la migration s'accuse suivant les principes mentionnés ci-dessus, et l'hystérésis augmente considérablement.

On rapprochera de ces faits les observations suivantes :

a. le volume d'un mélange de caoutchouc du type gomme pure, vulcanisé, reste sensiblement constant jusqu'à un allongement de 200 pour 100 environ, et varie ensuite (1), (2), (3), (4).

b. les diagrammes de rayons X montrent que la cristallisation devient notable, pour des allongements supérieurs à 200 pour 100 (5), (6).

c. des diagrammes de rayons X ont montré que, pour un allongement donné, la cristallisation se poursuit dans le temps, lors même que la tension diminue (7).

d. les éprouvettes tendues dans les conditions définies précédemment exhibent une augmentation de température notable (de 5 à 10°C) pour des allongements supérieurs à 200 pour 100 environ (1), (8).

e. les théories statistiques de l'élasticité, conduisant à des équations comme celle de F. T. Wall, par exemple, ne sont sensiblement vérifiées par l'expérience que pour des allongements au plus égaux à 200 pour 100 (9).

2. Conditions d'élasticité des hauts polymères cristallisables. — Loin de considérer, comme on l'a fait parfois, l'hystérésis comme une irrégularité gênante, nous la tiendrons comme une des manifestations fondamentales de la nature de l'élasticité des hauts polymères cristallisables, aux grands allongements. A la lumière des expériences citées, on peut dégager les deux caractères fondamentaux suivants :

1° Les conditions thermodynamiques de l'élasticité s'écartent d'autant plus de la réversibilité que l'allongement est grand.

2° La valeur de la tension obtenue, pour un allongement donné, dépend de toute l'histoire des déformations précédemment imposées.

Les conséquences immédiates de ces deux caractères seront que :

1° On ne pourra en général utiliser la notion de réversibilité dans le traitement thermodynamique des phénomènes.

2° On ne pourra utiliser des équations algébriques classiques dans la traduction mathématique des phénomènes. Si y est la fonction étudiée, et x_1, x_2, x_3, ..., x_n les variables indépendantes reconnues comme agissantes on ne pourra former une équation

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

telle que pour des valeurs de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ données, y se trouve déterminée.

3. Tentative d'interprétation des phénomènes. — A. CAS D'UN POLYMÈRE NE CRISTALLISANT PAS PAR TRACTION. — Nous admettrons en général qu'il existe une certaine hystérésis, attribuable à ce qu'on appelle « frottement interne » ([3]). Dans ce cas, la réversibilité thermodynamique ne pourra s'appliquer, et nous aurons seulement d'après le premier principe :

$F dl = dU_a - dQ_a$ (l'indice a étant utile par la suite), F étant la force extérieure appliquée, l la longueur de l'éprouvette (nous négligeons ici le travail de la pression hydrostatique extérieure).

En raisonnant sur l'unité de volume, nous aurons

([3]) Sans entrer dans le détail des causes structurelles de ce phénomène, nous appellerons frottement interne l'effet dont résulte une hystérésis cyclique (les cycles successifs se superposent à eux-mêmes), en l'absence de toute cristallisation. C'est ce qu'on observe expérimentalement, lorsque les allongements sont inférieurs à 200 pour 100.

encore :

$$\tau = \frac{dU_a}{d\lambda} - \frac{dQ_a}{d\lambda}, \qquad (1.3\,A)$$

τ étant alors la tension par unité de section initiale (avant toute déformation) et λ l'allongement relatif $\frac{1}{l}$.

Nous considérons que ce que nous appelons frottement interne n'entraîne aucune variation de l'énergie interne pour un processus isotherme, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un phénomène parfaitement identifiable au frottement, une partie de l'énergie fournie par la machine de traction se transformant en chaleur. Soit Q_1 la quantité de chaleur ainsi développée. Il vient :

$$\tau = \frac{dU_a}{d\lambda} - \left(\frac{dQ_1}{d\lambda} - \frac{dQ_2}{d\lambda}\right).$$

Lorsque $Q_1 = 0$ il n'y a pas de frottement interne, et on a affaire à l'élasticité parfaite. Nous pourrons alors considérer que la réversibilité thermodynamique s'applique. Si l'essai est conduit assez lentement, l'isothermicité sera respectée : c'est ce qu'on observe pour les essais conduits aux vitesses classiques des dynamomètres, 10, 20, 40 cm : mn, pour des allongements inférieurs à 200 pour 100.

Nous pourrons alors remplacer les dérivées totales par les dérivées partielles, à température constante

$$\tau = \left[\left(\frac{\partial U_a}{\partial \lambda}\right)_T - \left(\frac{\partial Q_2}{\partial \lambda}\right)_T\right] - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \lambda}\right)_T, \qquad (2.3\,A)$$

ou encore

$$\tau = \left[\left(\frac{\partial U_a}{\partial \lambda}\right)_T - T\left(\frac{\partial S_2}{\partial \lambda}\right)_T\right] - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \lambda}\right)_T. \qquad (3.3\,A)$$

Lorsque $\left(\frac{\partial U_a}{\partial \lambda}\right)_T = 0$, la tension est déterminée, au terme $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \lambda}\right)_T$ près, (facteur d'hystérésis), par le terme $T\left(\frac{\partial S_2}{\partial \lambda}\right)_T$; la transformation de ce terme, en utilisant l'équation de Boltzmann, reliant l'entropie à la probabilité thermodynamique d'un état, conduit aux expressions de la tension dérivées des théories statistiques déjà mentionnées.

Cependant, pour des allongements assez élevés (supérieurs à 100 pour 100) et en l'absence de toute cristallisation, il devient clair que sous l'effet du champ de forces internes créé par l'application d'une tension axiale, l'orientation des éléments du réseau qui forme l'élastomère ne se fait plus au hasard, mais tend à se produire dans une direction préférentielle.

L'arrangement au hasard des éléments d'une chaîne, lorsque seule la distance entre extrémités se trouve imposée, indépendamment même des empêchements stériques, est de moins en moins possible. De plus, dès qu'une portion de chaîne se trouve orientée suivant l'axe de traction, toute extension ultérieure ne pourra se traduire à son égard que par une résistance de nature géométrique (déformation des angles de valence, augmentation des distances entre atomes de carbone, ou simplement déplacement relatif des éléments déjà orientés les uns par rapport aux autres, pour des chaînes suffisamment voisines). Tout cela se traduira par une augmentation de l'énergie interne, au détriment du travail mécanique fourni par la machine de traction.

Les limites extrêmes correspondront donc :

a. au cas de l'élasticité statistique pure

$$\tau_a = T\left(\frac{\partial S_{2t}}{\partial \lambda}\right)_T, \qquad (4.3\,A)$$

b. au cas de l'élasticité classique :

$$\tau_b = \left(\frac{\partial U_{at}}{\partial \lambda}\right)_T, \qquad (5.3\,A)$$

l'indice t indiquant que U ou S_2 joue exclusivement. Pour un état d'allongement donné, nous pourrons dire que τ_a contribuera à la valeur de la tension, d'autant plus que l'allongement sera faible, et que τ_b y contribuera d'autant plus que cet allongement sera élevé.

Nous caractériserons ces contributions relatives par l'emploi d'un certain coefficient α représentant, si l'on veut, la fraction de section d'une éprouvette, qui résiste à cause de τ_b, $(1-\alpha)$ représentant la fraction qui résiste à cause de τ_a. De sorte que nous pourrons écrire :

$$\tau = \alpha\left(\frac{\partial U_{at}}{\partial \lambda}\right)_T - (1-\alpha)\,T\left(\frac{\partial S_{2t}}{\partial \lambda}\right)_T - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \lambda}\right)_T, \qquad (6.3\,A)$$

équation dont les termes s'identifient à ceux de de (3.3 A) suivant :

$$\alpha\left(\frac{\partial U_{at}}{\partial \lambda}\right)_T = \left(\frac{\partial U_a}{\partial \lambda}\right)_T,$$

$$(1-\alpha)\,T\left(\frac{\partial S_{2t}}{\partial \lambda}\right)_T = T\left(\frac{\partial S_2}{\partial \lambda}\right)_T.$$

On aura donc un moyen de traiter de l'élasticité des corps hautement élastiques, demeurant amorphes, par l'étude séparée des conditions aux limites, qui fournira le terme en S_{2t} et le terme U_{at}. Le terme en Q_1 se déterminera par la nature du frottement interne (assimilable avec une bonne approximation à un frottement liquide).

Pour la détermination de α, on pourra, pour simplifier, supposer des chaînes formées de chaînons faisant entre eux un angle constant, et doués d'une rotation parfaitement libre. La connaissance de la fonction de répartition de la longueur de ces chaînes permettra de déterminer, pour un allongement donné, la proportion de ces chaînes ayant atteint leur extension maximum, par le procédé cinétique, et qui, à partir de cet allongement, résisteront avec

augmentation d'énergie interne. On pourra prendre cette proportion comme valeur de α.

B. Cas d'un polymère cristallisant par traction. — Nous admettrons que la traction fait naître dans l'élastomère une cristallisation, d'autant plus importante que l'allongement est élevé, mais que celle-ci ne peut atteindre une valeur d'équilibre instantanément, et se trouve affectée par tout le processus de déformations imposé avant d'atteindre l'allongement considéré; de sorte qu'à cet allongement correspondra une infinité de valeurs du taux de cristallisation, puisqu'il existe une infinité de possibilités quant à la loi de déformation. Nous dirons donc que le taux de cristallisation est doué d'hérédité.

Soit encore la tension :

$$\tau = \frac{dU}{d\lambda} - \frac{dQ}{d\lambda}.$$

Nous appelons U_a et Q_a les valeurs de l'énergie interne et de la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur, dans le cas où le polymère reste amorphe (cas traité en 3-A).

Nous appelons U_c et Q_c les valeurs des mêmes quantités, dans le cas où le polymère est entièrement cristallisé. Enfin, U_b et Q_b rendent compte des variations des mêmes quantités, lorsque la cristallisation se produit.

Nous aurons alors :

$$dU_a \geq 0, \qquad dU_b < 0, \qquad dU_c > 0$$
$$dQ_a = T\,dS_a \leq 0, \qquad dQ_b > 0, \qquad dQ_c \geq 0.$$

En effet, la cristallisation à un allongement donné tendant vers un équilibre, cette tendance entraînera une diminution d'énergie interne (ce qui entraînera une diminution de la tension), alors que l'extension de la fraction cristallisée se fera suivant les lois classiques de l'élasticité, avec augmentation de l'énergie interne.

Soit β un coefficient défini selon les mêmes conditions que α, caractérisant cette fois la fraction de section de l'éprouvette qui peut être considérée comme résistant suivant les lois de l'élasticité cristalline, $(1 - \beta)$ caractérisant la fraction qui résiste suivant les lois de l'élasticité amorphe.

La contribution de U_a et Q_a sera donc proportionnelle à $(1 - \beta)$; celle de U_c et Q_c, proportionnelle à β; quant à U_b et Q_b à un instant donné, l'accroissement de leur contribution sera proportionnel à l'accroissement de β, de sorte que la contribution totale à un instant donné sera :

$$\int_0^{\beta} \left(\frac{dU_b}{d\lambda} - \frac{dQ_b}{d\lambda}\right) d\beta$$

ou encore

$$\int_0^{\lambda} \frac{d\beta}{d\lambda}\left(\frac{dU_b}{d\lambda} - \frac{dQ_b}{d\lambda}\right) d\lambda. \tag{1.3 B}$$

Nous aurons donc finalement :

$$\tau = (1 - \beta)\left(\frac{dU_a}{d\lambda} - \frac{dQ_a}{d\lambda}\right) + \int_0^{\lambda} \frac{d\beta}{d\lambda}\left(\frac{dU_b}{d\lambda} - \frac{dQ_b}{d\lambda}\right) d\lambda - \beta\left(\frac{dU_c}{d\lambda} - \frac{dQ_c}{d\lambda}\right). \tag{2.3 B}$$

Nous exprimerons $\frac{dU_a}{d\lambda}$ et $\frac{dQ_a}{d\lambda}$ en fonction de U_{at} et Q_{at} (l'indice t indiquant qu'il s'agit de la contribution totale de U, lorsque $(\alpha - 1) = 0$ ou de Q, lorsque $\alpha = 0$)

Ici, on ne peut admettre que l'essai est isotherme, puisque dans les conditions opératoires, l'augmentation de température de l'éprouvette est notable.

Nous aurons donc :

$$\frac{dU_a}{d\lambda} = \alpha\left[\left(\frac{\partial U_{at}}{\partial\lambda}\right)_T + \left(\frac{\partial U_{at}}{\partial T}\right)_\lambda \frac{dT}{d\lambda}\right] \tag{3.3 B}$$

et

$$\frac{dQ_a}{d\lambda} = (1 - \alpha)\left[\left(\frac{\partial Q_{2t}}{\partial\lambda}\right)_T + \left(\frac{\partial Q_{2t}}{\partial T}\right)_\lambda \frac{dT}{d\lambda}\right], \tag{4.3 B}$$

$\left(\frac{\partial Q_{2t}}{\partial T}\right)_\lambda$ représente la chaleur spécifique de la phase amorphe, à allongement constant, soit $C_{a\lambda}$ qui est égale à $\left(\frac{\partial U_{at}}{\partial T}\right)_\lambda$ puisque le travail fourni dans ce cas est nul; $C_{a\lambda}$ est en général une fonction de λ. D'autre part $\left(\frac{\partial Q_{2t}}{\partial\lambda}\right)_T$ est égal à $T\left(\frac{\partial S_{2t}}{\partial\lambda}\right)$.

Nous aurons donc pour τ :

$$\tau = (1 - \beta)\left[\alpha\left(\frac{\partial U_{at}}{\partial\lambda}\right)_T + (1 - \alpha)\,T\left(\frac{\partial S_{2t}}{\partial\lambda}\right)_T + C_{a\lambda}\frac{dT}{d\lambda}\right] + \dots + \int_0^{\lambda} \frac{d\beta}{d\lambda}\left[\frac{dU_b}{d\lambda} - \frac{dQ_b}{d\lambda}\right] d\lambda + \dots - \beta\left[\frac{dU_c}{d\lambda} - \frac{dQ_c}{d\lambda}\right] + \frac{dQ'_1}{d\lambda}, \tag{5.3 B}$$

$\frac{dQ'_1}{d\lambda}$ représentant la part du frottement interne (nous écrivons Q'_1 pour différencier cette valeur de Q_1, valable en fraction amorphe seule).

L'équation (5.3 B) pourra se simplifier; nous admettrons par exemple que la fraction cristallisée résiste grâce à une augmentation de U_c, de sorte que $\frac{dQ_c}{d\lambda} = 0$.

$\frac{dQ_b}{d\lambda}$ sera déterminé par les conditions de l'essai, $\frac{dU_b}{d\lambda}$ se déterminant par la cinétique de la cristallisation, une partie de l'énergie libérée sera dissipée en chaleur, compte tenu des dimensions de l'éprouvette, de sa conductibilité thermique dans l'état considéré, des conditions de température et de convexion

extérieures. Le reste contribuera à diminuer la tension.

Nous en venons maintenant à la détermination de β. Nous avons vu que le phénomène de cristallisation était de caractère héréditaire. Nous dirons donc que β dépend de l'histoire des déformations précédemment imposées, autrement dit, de toutes les valeurs de l'allongement précédemment rencontrées [4].

Appelons t la valeur du temps au moment où l'on désire connaître la valeur de β, et r la valeur courante du temps.

La valeur de β dépend de l'allongement considéré, et de toutes les valeurs déjà prises par cet allongement.

$$\beta = f(\lambda_t) + F\left(\overset{t}{\underset{-\infty}{\lambda_1}}, \overset{t}{\underset{-\infty}{\lambda_2}}, \overset{t}{\underset{-\infty}{\lambda_3}}, \ldots, \overset{t}{\underset{-\infty}{\lambda_t}}\right),$$

les signes $\overset{t}{\underset{-\infty}{\lambda_1}}$, $\overset{t}{\underset{-\infty}{\lambda_3}}$, ..., représentant l'influence des allongements λ_1, λ_2, ..., au temps t, supposant que l'on remonte indéfiniment dans le temps.

C'est-à-dire que l'imposition au temps r et pendant une durée dr, d'un allongement λ_2, entraînera une certaine valeur de β dont il restera au temps t un certain résidu, que nous définirons en valeur spécifique par $\varphi(t, r,)$ dr.

Nous supposerons que le résidu total est, de plus, une certaine fonction de $\lambda(r)$, c'est-à-dire, par exemple, que le résidu des actions antérieures est d'autant plus grand que les allongements imposés furent grands. Au temps t, le résidu des actions antérieures sera la somme des résidus des actions élémentaires.

$$R = \int_{-\infty}^{t} F[\varphi(t, r), \lambda(r)]\, \mathrm{d}r. \qquad (6.3\,\mathrm{B})$$

Supposant que toute action héréditaire antérieure à un certain instant o pris pour origine est négligeable, nous aurons pour β

$$\beta = f(\lambda_t) + \int_{0}^{t} F[\varphi(t, r), \lambda(r)]\, \mathrm{d}r, \qquad (7.3\,B)$$

$\lambda(r)$ représente la loi de traction imposée; dans le cas des dynamomètres classiques, l'allongement est proportionnel au temps de sorte que l'on aura

$$\lambda(r) = \left| \lambda_m + \frac{2(\lambda_M - \lambda_m)}{\theta}(r - K\theta) \right|_{\lambda_m}^{\lambda_M}$$

avec

λ_M allongement maximum imposé,
λ_m allongement minimum imposé,
θ période de la sollicitation.

Il sera plus aisé de remplacer cette expression par une série de Fourier, c'est-à-dire :

$$\lambda(r) = \frac{\lambda_M - \lambda_m}{r} \times \left[1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{2\pi}{\theta}r}{1^2} + \frac{\cos\frac{6\pi}{\theta}r}{3^2} + \ldots + \frac{\cos\frac{10\pi}{\theta}r + \ldots}{5^2} \right) \right] + \lambda_m.$$

Finalement β se composera d'une fonction $f(\lambda_t)$, fonction algébrique simple de l'allongement, correspondant à la cristallistion apparaissant lors d'un allongement instantané, et d'un terme complémentaire, de nature héréditaire.

Si le taux de cristallisation, à une température donnée, tend vers une limite uniquement fonction de l'allongement, l'équation intégrale

$$\int_{0}^{t} F[\varphi(t, r), \lambda(r)]\, \mathrm{d}r$$

doit tendre vers une limite unique pour $t = \infty$ quelle que soit l'histoire des déformations, c'est-à-dire quelle que soit $\lambda(r)$.

Il semble toutefois que la résolution générale de l'équation soit compliquée.

On obtiendra une première simplification en admettant que le résidu d'action au temps r est proportionnel à $\lambda(r)$. C'est-à-dire

$$R(t) = \int_{0}^{t} \varphi(t, r)\, \lambda(r)\, \mathrm{d}r. \qquad (8.3\,\mathrm{B})$$

C'est une équation de Volterra linéaire de première espèce. Cependant, le problème classique de résolution de ces équations est de trouver $\lambda(r)$, connaissant $\varphi(t, r)$ et $R(t)$.

Ici, nous cherchons à déterminer $R(t)$, connaissant $\lambda(r)$, mais ignorant la forme de $\varphi(t, r)$.

Nous pouvons, *a priori*, fixer quelques-uns des caractères auxquels doit répondre le coefficient $\varphi(t, r)$.

On démontre que, lorsqu'il existe un cycle d'hystérésis unique (hystérésis magnétique, élasticité visqueuse pure), φ est une fonction de $(t\text{-}r)$; c'est ce qu'on appelle l'hérédité cyclique. Ici, nous avons déformation et migration des cycles, de sorte que les importantes conclusions dégagées pour l'hystérésis cyclique ne pourront s'appliquer.

Mais, si les phénomènes tendent vers une limite unique, φ se réduira à une fonction de $(t\text{-}r)$ lorsque l'on aura $t = \infty$. De plus, la migration des cycles montre que β augmente constamment, pour un allongement donné, c'est-à-dire que φ sera nécessairement positif, d'une part, et sera fonction croissante de t. Enfin la disparition de l'action héréditaire dans le temps (mise en évidence par l'étude de l'influence du repos entre chaque cycle) montre que φ doit être fonction décroissante de $(t\text{-}r)$.

[4] Sur les phénomènes d'hérédité, *voir* V. VOLTERRA [10], [11], [12].

4. **Conclusion**. — L'expérience montre que, lorsque l'on étire un polymère élastique cristallisable dans les conditions correspondant à celles des dynamomètres classiques, les caractères principaux de l'élasticité mise ainsi en évidence sont :

1° Irréversibilité thermodynamique des phénomènes;

2° Liaison héréditaire entre la valeur de la tension à un instant considéré, et les déformations antérieurement imposées.

Partant du principe de conservation de l'énergie, on a introduit une quantité de chaleur Q_1, caractérisant l'hystérésis due à ce qu'on appelle frottement interne; un coefficient α caractérisant les contributions relatives de l'énergie interne et de l'entropie, pour l'élasticité de la fraction demeurant amorphe, ce coefficient étant de nature algébrique simple (c'est-à-dire que, pour une valeur donnée de l'allongement λ existe une seule valeur possible de α); un coefficient β caractérisant les contributions relatives des fractions cristallisées et amorphes, ce coefficient étant de nature héréditaire (c'est-à-dire que, pour un allongement donné, l'importance de la cristallisation dépendra de toute l'histoire des déformations antérieurement imposées).

C'est de la forme du coefficient d'hérédité $\varphi(t, r)$ intervenant dans l'expression de β, que dépend l'hystérésis considérable qui se développe au-dessus de l'allongement moyen de 200 pour 100 (allongement à partir duquel la cristallisation se manifeste clairement), ainsi que les différents caractères liés à la migration et à la déformation des cycles successifs.

L'action de l'amplitude et de la localisation des cycles dans le domaine des allongements est interprétée en ce que la loi d'allongement imposée $\lambda(r)$, intervient également dans l'expression de β.

Manuscrit reçu en mars 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Clouaire J. M. — *Thèse*, Paris (janvier 1947).
[2] Bouasse H. — *J. de Phys.*, 1903, **2**, 490-510.
[3] Feuchter H. — *Gummi Zeit.*, 1925, **39**, 1167-1168.
[4] Holt W. L., Mac Pherson A. T. — *Rub. Chem. Tech.*, 1937, **10**, 412-431.
[5] Clark G. L. — *Ind. Rub. World*, 1929, **79**, 55.
[6] Goppel J. M. — *Thèse*. Delft 1945.
[7] Clark G. L., Kabler M., Blaker E, Ball J. M. — *Ind. Eng. Chem. Ind. edit.*, 1940, **32**, 1474, 1477.
[8] Boone E., Newman R. — *Ind. Eng. Chem. Ind. edit.*, 1926, **18**, 539-540.
[9] Wall F. T. — *J. Chem. Phys.*, 1942, **10**, 132-134; 1942, **10**, 485-488; 1943, **11**, 67-71; 1943, **11**, 527-530.
[10] Volterra V. — Leçons sur les fonctions de lignes. Gauthiers-Villars, édit., Paris, 1913.
[11] Volterra V. — *J. de Math.*, 1928, **7**, 249-298.
[12] Volterra V. — Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. Gauthiers-Villars, édit., Paris, 1931.

SUR LA CORRECTION RELATIVISTE DANS QUELQUES PROBLÈMES DE DIFFUSION

Par Mircea DRĂGANU.
Cluj (Roumanie).

Sommaire. — Dans les lignes qui suivent nous faisons quelques remarques sur l'extension relativiste des quelques équations qui servent pour étudier, dans les différentes théories, les phénomènes de diffusion.

1. Il me semble utile pour plus de clarté, de rappeler d'abord quelques définitions fondamentales (1). S'il n'y a ni création, ni anéantissement de particules, pendant ou à cause du mouvement, et si N est leur nombre total, dont le centre se trouve à un moment donné t effectivement à l'intérieur du volume fini V, on peut définir une *densité corpusculaire* (*moléculaire* dans le cas où les particules considérés sont des molécules). Une telle densité est définie alors par la valeur limite du rapport entre le nombre des particules et la grandeur du volume, quand le volume devient infiniment petit, si cette limite existe. On est donc conduit à écrire

$$n = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V}. \qquad (1)$$

Cette définition implique, comme on l'a déjà remarqué, certaines difficultés, car en général, ni la valeur de n, ni celle de V ne peuvent s'exprimer toujours par des nombres entiers. Tout de même, dans l'interprétation probabiliste, il est permis de définir le nombre ΔN des particules contenues dans l'élément de volume ΔV par le produit $n \Delta V$, en d'autres mots de définir une probabilité de présence d'une particule (son centre ou bien elle-même, si elle est physiquement assimilable à un point matériel) à l'intérieur du volume ΔV.

D'autre part, une particule considérée quelconque prise au hasard, possède par hypothèse aussi une vitesse de translation, c'est-à-dire une énergie cinétique. On définit alors en mécanique statistique la probabilité que la valeur de la vitesse d'une molécule ait sa valeur comprise entre v (de composantes v_x, v_y, v_z) et $v + \mathrm{d}v$ (composantes $v_x + \mathrm{d}v_z$, $v_y + \mathrm{d}v_y$, $v_z + \mathrm{d}v_z$) au moment t par l'expression

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)\, \mathrm{d}v_x\, \mathrm{d}v_y\, \mathrm{d}v_z = f\left(\vec{r}, v, t\right) \mathrm{d}\omega, \qquad (2)$$

la fonction $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$ étant celle qu'on appelle couramment la loi de répartition des vitesses.

On emploie souvent la notation plus commode

$$w(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}v_x\, \mathrm{d}v_y\, \mathrm{d}v_z = n(x, y, z, t)\, f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z \qquad (3)$$

ou encore la notation symbolique équivalente

$$w\left(\vec{r}, v, t\right) \mathrm{d}V\, \mathrm{d}\vec{v} = n\left(\vec{r}, t\right) f(\vec{r}, v)\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}\vec{v}, \qquad (4)$$

pour indiquer la probabilité de trouver au moment t une particule de l'espèce considérée, dont la vitesse serait comprise entre $\vec{v}$ et $\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$ à l'intérieur du volume $\mathrm{d}V$.

2. Soit maintenant à un moment donné un nombre ΔN très petit, bien déterminé et fini des particules. Ce nombre étant invariant par rapport au changement de la vitesse des particules dans un système de référence déterminé, il s'ensuit qu'il est invariant par rapport à une transformation du groupe de Lorentz (2). Cette proposition peut être démontrée aussi directement. En effet, comme ΔN représente le nombre des particules contenues dans l'élément de volume $\Delta V = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, on peut écrire, d'après la définition (1)

$$n = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V}. \qquad (5)$$

Dans un autre système de coordonnées $S'(O', x', y', z', t')$, animé par rapport à $S(O, x, y, z, t)$ de la vitesse constante $\vec{v}$, on peut définir de même une densité

$$n' = \lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\Delta N'}{\Delta V'}, \qquad (6)$$

$\Delta V' = \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y'\, \mathrm{d}z'$ étant l'élément de volume tridimensionnel. Soit w_x la composante de la vitesse des particules ΔN par rapport à l'axe de x dans le système de référence S. On peut écrire alors la relation (3).

$$n' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \left(1 - \frac{w_x v}{c^2}\right) n, \qquad (7)$$

(1) *Voir* sur ce sujet J. H. Jeans, *Théorie dynamique des gaz*, Paris, 1925, traduit par A. Clerc, p. 15-17.

(2) M. von Laue, *Die Relativitätstheorie*, I, Braunschweig, 1921, p. 107.

(3) J. Becquerel, *Le principe de relativité et la théorie de la gravitation*, Paris 1922, p. 94; M. von Laue, *loc. cit.*, p. 108.

ou encore, en remplaçant les valeurs (5) et (6)

$$\lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\Delta N'}{\Delta V'} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}\left(1-\frac{w_x v}{c^2}\right)\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} \quad (8)$$

et, d'après les transformations de Lorentz

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}\left(1-\frac{w_x v}{c^2}\right), \quad (9)$$

t' étant le temps mesuré en S' et t le temps mesuré en S. On obtient alors de (8)

$$\lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\Delta N'}{\Delta V'} = \frac{dt'}{dt}\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} \quad (10)$$

et puisque l'élément de volume quadridimensionnel est un invariant par rapport aux transformations de Lorentz, $\Delta V'\, dt' = \Delta V\, dt$ on conclut

$$\Delta N' = \Delta N. \qquad \text{C. Q. F. D.} \quad (11)$$

Le nombre de particules ΔN est donc un invariant.

3. Désignons maintenant par $\vec{v}$ la vitesse des particules ΔN par rapport à un système de référence $S(O, x, y, z, t)$ et soit ΔV_0 l'élément de volume très petit, mais fini mesuré dans le système propre S_0 concernant ces particules. La grandeur de l'élément de volume dans le système S s'obtiendra par la transformation

$$\Delta V = \Delta V_0 \sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}. \quad (12)$$

Si donc nous définissons par (5) la densité corpusculaire des particules dans le système S et par

$$n_0 = \lim_{\Delta V_0 \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V_0}, \quad (13)$$

la même densité dans le système de coordonnées S_0, on aura la relation

$$n = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} = \lim_{\Delta V_0 \to 0} \frac{\Delta N}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\Delta V_0}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}\lim_{\Delta V_0 \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} n_0, \quad (14)$$

c'est-à-dire

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}. \quad (15)$$

On définit encore en relativité restreinte le quadri-vecteur $\mathbf{Q}_\mu\,(Q_x, Q_y, Q_z, Q_u)$ par les relations ([4])

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \frac{v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}, & Q_y &= \frac{v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}, \\ Q_z &= \frac{v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}, & Q_u &= \frac{ic}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}, \\ v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, & u &= ict. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

L'élément d'extension en phase invariant par rapport au temps ([5]) s'écrit en mécanique statistique relativiste de la manière suivante :

$$d\Omega = dx\, dy\, dz\, dQ_x\, dQ_y\, dQ_z, \quad (17)$$

ou symboliquement

$$d\Omega = dV\, d\vec{Q}. \quad (18)$$

On posera encore dans la suite pour abréger l'écriture

$$Q^2 = Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2. \quad (19)$$

D'après ces définitions la probabilité de présence au moment t d'une particule en mouvement dans le volume à six dimensions (17) sera donc donnée par

$$W(x, y, z, Q_x, Q_y, Q_z, t)\, dx\, dy\, dz\, dQ_x\, dQ_y\, dQ_z, \quad (20)$$

ou bien symboliquement

$$W(\vec{r}, Q, t)\, dV\, d\vec{Q}, \quad (21)$$

W étant une fonction de probabilité généralisée. Si F représente la fonction généralisée de répartition des vitesses ([6]), on a

$$W(x, y, z, Q_x, Q_y, Q_z, t) = n(x, y, z, t)\, F(x, y, z, Q_x, Q_y, Q_z, t). \quad (22)$$

On peut alors écrire, en tenant compte de (12)

$$W(\vec{r}, Q, t)\, dV\, d\vec{Q} = W_0(\vec{r}, Q, t)\, dV_0\, d\vec{Q}, \quad (23)$$

car on a

$$W(\vec{r}, Q, t) = n(\vec{r}, t)\, F(\vec{r}, Q, t) = \frac{n_0(\vec{r}, t)}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} F(\vec{r}, Q, t) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} W_0(\vec{r}, Q, t), \quad (24)$$

([4]) *Voir* par exemple J. BECQUEREL, *loc. cit.*, p. 114.

([5]) M. PLANCK, *Verh. d. Deutsch. Phys. Ges.*, 1906, **8**, p. 136-141; F. JÜTTNER, *Ann. d. Phys.*, 1911, 4e série, **34**, p. 856-882.

([6]) F. JÜTTNER, *Ann. der Physik*, 4e série, 1911, **34**, p. 856-882; *Ann. der Phys.*, 4e série, 1911, **35**, p. 145-161; *Z. f. Physik*, 1928, **47**, p. 542-566; *voir* aussi A. BUSEMANN, *Physik Z.*, 1932, **33**, p. 775-777; P. E. BÖHMER, 1928, **47**, p. 542-566; *Phys. Z.*, 1933, **34**, p. 454; A. BÖHMER et A. BUSEMANN, *Physik Z.*, 1934, **35**, p. 350.

si l'on désigne $n_0 F$ par W_0. L'expression (21) est donc invariante par rapport au groupe de Lorentz.

4. Nous introduisons maintenant le quadrivecteur $\mathbf{M}_\mu$, dont les composantes sont

$$\left.\begin{array}{ll} M_x = W_0 Q_x, & M_y = W_0 Q_y, \\ M_z = W_0 Q_z, & M_u = W_0 Q_u. \end{array}\right\} \quad (25)$$

L'équation de continuité de l'hydrodynamique relativiste s'écrira alors de la manière suivante :

$$\operatorname{Div} \mathbf{M}_\mu = 0 \quad (26)$$

ou encore

$$W_0 \operatorname{Div} \mathbf{Q}_\mu + (\mathbf{Q}_\mu, \operatorname{Grad} W_0) = 0. \quad (27)$$

Les opérateurs Div, Grad, appliqués, soit au quadrivecteur $\mathbf{P}_\mu$, soit au scalaire U, signifient les opérations

$$\operatorname{Div} \mathbf{P}_\mu = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial P_u}{\partial u}, \quad \partial u = ic\,\partial t; \quad (28)$$

$$\operatorname{Grad} U\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial u}\right). \quad (29)$$

Tenant compte de (24) et (25) et en introduisant la nouvelle fonction

$$\left.\begin{array}{l} w_0(\vec{r}, v, t) = W_0(\vec{r}, Q, t), \\ w(\vec{r}, v, t) = W_0(\vec{r}, Q, t), \end{array}\right\} \quad (30)$$

la formule (26, 27) peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{w_0(\vec{r}, v, t)}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}\right] + \operatorname{div}\left[\frac{\vec{v}\, w_0(\vec{r}, v, t)}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}\right] = 0, \quad (31)$$

où le symbole Div a la signification habituelle du calcul vectoriel. La fonction W se transformant d'après la loi (24), elle doit avoir vraiment la signification d'une probabilité de présence, comme l'a bien remarqué E. Durand (7).

5. Supposons les particules soumises au cours de leur mouvement à des chocs élastiques. Soit alors

$$\begin{aligned} &\Phi(Q, Q'-Q)\,\mathrm{d}\vec{Q} \\ &\quad = \Phi(Q_x, Q_y, Q_z, Q'_x - Q_x, \\ &\qquad Q'_y - Q_y, Q'_z - Q_z)\,\mathrm{d}Q_x\,\mathrm{d}Q_y\,\mathrm{d}Q_z, \quad (32) \end{aligned}$$

la probabilité par unité de temps pour qu'une particule change sa vitesse Q'_x, Q'_y, Q'_z et passe par suite d'un choc dans l'élément d'extension en phase $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}Q_x\,\mathrm{d}Q_y\,\mathrm{d}Q_z$.

Désignons par $\Gamma(Q_x, Q_y, Q_z)$ la probabilité totale de déflection à la suite des chocs

$$\begin{aligned} &\Gamma(Q_x, Q_y, Q_z) \\ &\quad = \int \Phi(Q'_x, Q'_y, Q'_z, Q_x - Q'_x, \\ &\qquad Q_y - Q'_y, Q_z - Q'_z)\,\mathrm{d}Q'_x\,\mathrm{d}Q'_y\,\mathrm{d}Q'_z, \quad (33) \end{aligned}$$

puis soit $\Omega(Q_x, Q_y, Q_z)$ la valeur finie de la probabilité totale de capture par unité de temps.

Tenant compte de (25), (28), (33), (34), la variation totale du nombre des particules dans l'élément $\mathrm{d}\omega$ et l'intervalle temporel $\mathrm{d}t$ est alors

$$\begin{aligned} &(\operatorname{Div} \mathbf{M}_\mu)\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\vec{Q}\,\mathrm{d}t \\ &\quad = \mathrm{d}V\,\mathrm{d}\vec{Q}\,\mathrm{d}t \int W(\vec{r}, Q', t)\,\Phi(Q, Q'-Q)\,\mathrm{d}\vec{Q}' \\ &\qquad + \mathrm{d}V\,\mathrm{d}\vec{Q}\,\mathrm{d}t\, W(\vec{r}, Q, t)\,[\Gamma(Q) + \Omega(Q)] \quad (34) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}(\mathbf{Q}_\mu W_0) &= W(\vec{r}, Q, t)\,[\Gamma(Q) + \Omega(Q)] \\ &\quad + \int W(\vec{r}, Q, t)\,\Phi(Q, Q'-Q)\,\mathrm{d}\vec{Q}'. \quad (35) \end{aligned}$$

On démontre ensuite facilement la formule (8)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \sqrt{1+\dfrac{Q^2}{c^2}}, \\ Q^2 = Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2, \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \end{array}\right\} \quad (36)$$

La relation intégro-différentielle (36) peut s'écrire alors, en tenant compte de (24) et (36), sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\operatorname{Div}(\mathbf{Q}_\mu W_0) \\ &\quad = \int W_0(\vec{r}, Q', t)\sqrt{1+\frac{Q'^2}{c^2}}\,\Phi(Q, Q'-Q)\,\mathrm{d}\vec{Q}' \\ &\qquad + W_0(\vec{r}, Q, t)\sqrt{1+\frac{Q^2}{c^2}}\,[\Gamma(Q) + \Omega(Q)]. \quad (37) \end{aligned}$$

Or, comme on considère un courant des particules en diffusion à vitesse $\vec{Q}$, donc la vitesse des particules considérée, dans le volume $\mathrm{d}V$ au moment t est supposée constante, on doit encore avoir

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}_\mu \operatorname{Grad} W_0 \\ &\quad = W_0(\vec{r}, Q, t)\sqrt{1+\frac{Q^2}{c^2}}\,[\Gamma(Q) + \Omega(Q)] \\ &\qquad + \int \sqrt{1+\frac{Q'^2}{c^2}}\, W_0(\vec{r}, Q', t)\,\Phi(Q, Q'-Q)\,\mathrm{d}\vec{Q}', \quad (38) \end{aligned}$$

ou encore, d'après (16) et (25)

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+\frac{Q^2}{c^2}}\frac{\partial W_0}{\partial t} + (\vec{Q}, \operatorname{grad} W_0) = W_0(\vec{r}, Q, t) \\ &\quad \times \sqrt{1+\frac{Q^2}{c^2}}\,[\Gamma(Q) + \Omega(Q)] + \int W_0(\vec{r}, Q', t) \\ &\quad \times \sqrt{1+\frac{Q'^2}{c^2}}\,\Phi(Q, Q'-Q)\,\mathrm{d}\vec{Q}'. \quad (39) \end{aligned}$$

(7) E. Durand, *Journ. Math. pures et appliquées*, 1946, **25**, p. 181.

(8) F. Jüttner, *Ann. der Physik*, 4e série, 1911, **34**, p. 859.

L'équation intégro-différentielle (38, 39) doit être la généralisation relativiste de la formule de O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark (⁹). L'équation donnée plus haut peut être écrite aussi dans l'espace x, y, z, v_x, v_y, v_z de la manière suivante en introduisant les nouvelles fonctions $w_0(\vec{r}, v, t)$, $\varphi(v, v')$, $\gamma(v)$, $\omega(v)$,

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} + \left(\vec{v}, \operatorname{grad} w_0\right) = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \int \varphi(v, v') \frac{w\left(\vec{r}, v', t\right)}{\left(\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\right)^6} \times \mathrm{d}v' + w_0\left(\vec{r}, v, t\right)[\gamma(v)+\omega(v)]. \tag{40}$$

On peut en effet exprimer l'élément de volume de vitesse $\mathrm{d}\vec{Q}$ en fonction de l'élément $\mathrm{d}\vec{v}$ (¹⁰)

$$\mathrm{d}\vec{Q} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^5}. \tag{41}$$

Complément de calcul. — *a. Démonstration de la formule* (36). — En effet, on a

$$Q_x = \frac{v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}, \qquad Q_y = \frac{v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}},$$

$$Q_z = \frac{v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}.$$

En élevant au carré et ajoutant, on obtient

$$Q^2 = \frac{v^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}.$$

Divisant par c^2 et en ajoutant l'unité aux deux membres, on trouve

$$1+\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{Q^2}{c^2}+1, \qquad \frac{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)+\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{Q^2}{c^2}+1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \sqrt{\frac{Q^2}{c^2}+1}.$$

b. Démonstration de la formule (41). — Nous avons

$$\mathrm{d}\left[\frac{v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] = \frac{\mathrm{d}v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}} \frac{v}{c} \mathrm{d}\left(\frac{v}{c}\right) v_x,$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] = \frac{\mathrm{d}v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{1}{\left[\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\right]^3} \frac{v}{c} \mathrm{d}\left(\frac{v}{c}\right) v_y,$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] = \frac{\mathrm{d}v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{1}{\left[\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right]^3} \frac{v}{c} \mathrm{d}\left(\frac{v}{c}\right) v_z,$$

or,

$$v_x = c\left(\frac{v}{c}\right), \qquad c\,\mathrm{d}\left(\frac{v}{c}\right) = \mathrm{d}v_x, \qquad v_y = v_z = 0,$$

le système de coordonnées étant choisi lié au corpuscule en mouvement dans la direction Ox; il s'ensuit

$$\mathrm{d}\left[\frac{v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] = \frac{\mathrm{d}v_y}{\left[\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right]},$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] \mathrm{d}v_z,$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{v^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \mathrm{d}v_x,$$

$$\mathrm{d}Q_x = \mathrm{d}\left[\frac{v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}v_x,$$

$$\mathrm{d}Q_y = \mathrm{d}\left[\frac{v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}v_y,$$

$$\mathrm{d}Q_z = \mathrm{d}\left[\frac{v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}\right] = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}v_z,$$

$$\mathrm{d}Q_x\,\mathrm{d}Q_y\,\mathrm{d}Q_z = \frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^5} \mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z.$$

Manuscrit reçu le 10 février 1949.

(⁹) O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark, *Phys. Rev.*, 1938, **53**, p. 173.

(¹⁰) Pour la démonstration de cette relation comparer : J. Becquerel, *loc. cit.*, p. 100-101; *voir* aussi F. Jüttner, *Ann. der Physik*, 4ᵉ série, 1911, **34**, p. 862.

Le Gérant : Maurice Blondin. 132980 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1949.